Fractales tridimensionnelles et solides de Platon

André Vallières
Superviseur : Dominic Rochon

Université du Québec à Trois-Rivières

Fonds de recherche Nature et technologies Québec

Introduction

Depuis l'apparition des premières images de **fractales** générées par ordinateur, l'engouement pour ces objets géométriques extrêmement irréguliers et fréquemment autosimilaires n'a jamais cessé d'augmenter.

L'ensemble de Mandelbrot est un exemple de fractale bidimensionnelle générée à partir d'itérations de nombres complexes. En généralisant adéquatement ces derniers, on peut donner plusieurs versions 3D de cet ensemble. Étonnamment, certaines d'entre elles ne présentent aucun relief fractal.

Objectif : Étudier les diverses manifestations de solides platoniciens et d'autres polyèdres réguliers parmi les coupes tridimensionnelles sous-jacentes à l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe.

Ensemble de Mandelbrot

Nombres complexes ($\mathbb{C}$)

Considérons un nombre particulier dénoté par la lettre i et tel que

$$i^2 = -1.$$

On appelle le nombre i **unité imaginaire**. L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ correspond aux nombres de la forme

$$c = x + yi,$$

où x et y sont des nombres réels. Puisque tout nombre complexe possède deux composantes, on peut les représenter dans un plan à deux dimensions appelé le plan complexe :

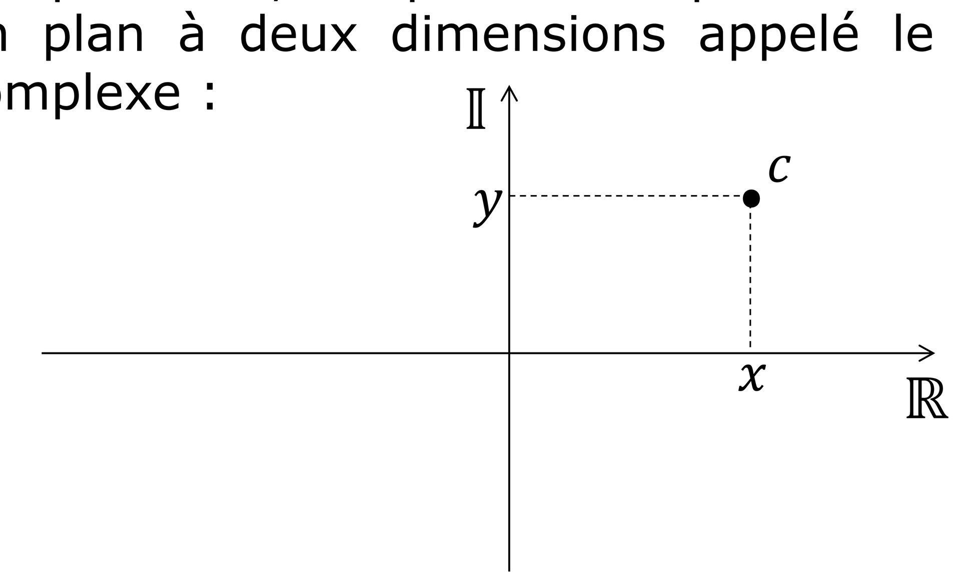


Fig. 1 : Représentation graphique d'un nombre complexe.

L'**ensemble de Mandelbrot** $\mathcal{M}$ correspond aux points c_0 du plan complexe pour lesquels la suite définie par la récurrence

$$c_{m+1} = c_m^2 + c_0$$

reste bornée.

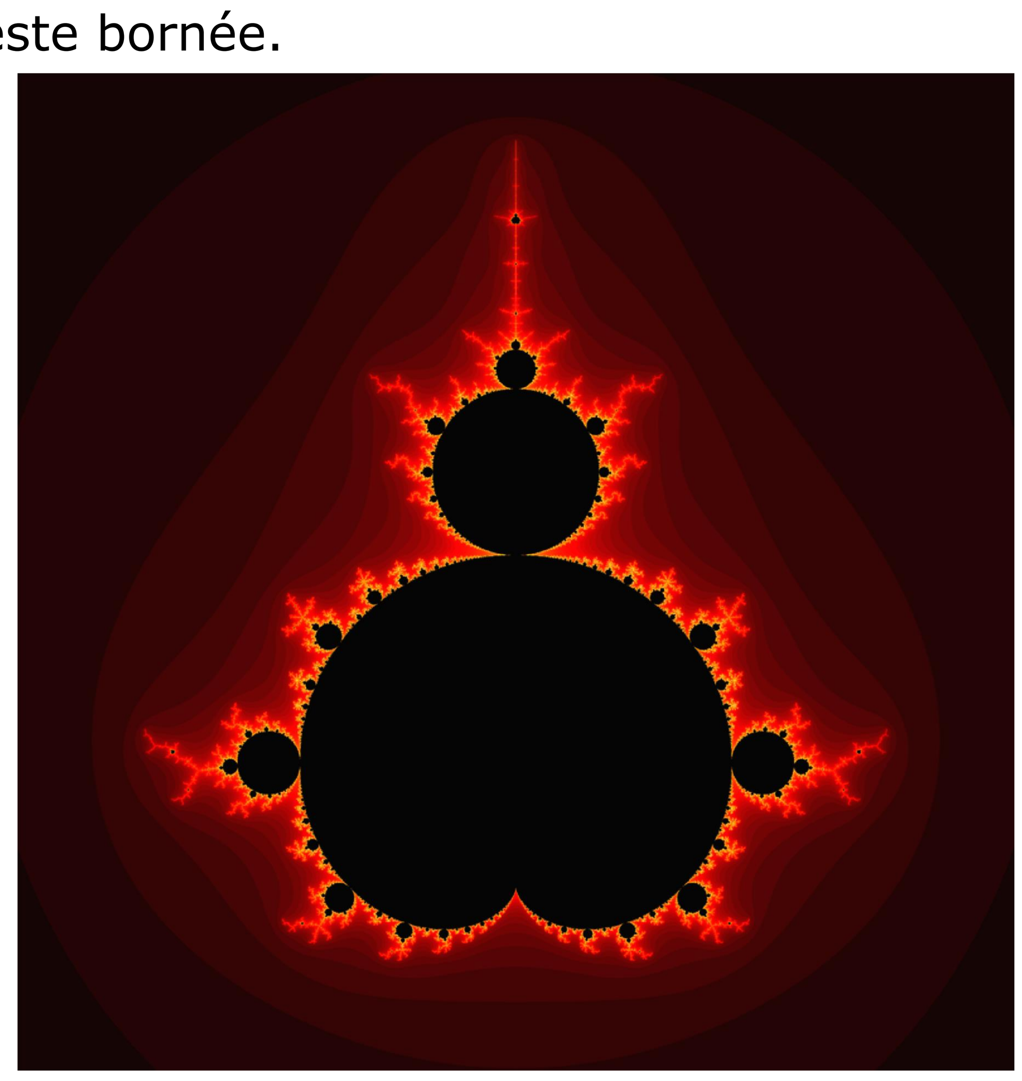


Fig. 2 : Ensemble de Mandelbrot (avec rotation de 90°) et ses couches de divergence.

Généralisation aux dimensions supérieures

Nombres tricomplexes ($\mathbb{TC}$)

Une façon de généraliser les nombres complexes aux dimensions supérieures consiste à utiliser trois unités imaginaires dénotées par $\mathbf{i_1}$, $\mathbf{i_2}$ et $\mathbf{i_3}$ ainsi que toutes leurs combinaisons pour écrire

$$\zeta = x_1 + x_2\mathbf{i_1} + x_3\mathbf{i_2} + x_4(\mathbf{i_1i_2}) + x_5\mathbf{i_3} + x_6(\mathbf{i_1i_3}) + x_7(\mathbf{i_2i_3}) + x_8(\mathbf{i_1i_2i_3}).$$

Le nombre ζ ainsi créé fait partie de l'ensemble des nombres tricomplexes. Puisque ceux-ci ont huit composantes, il s'agit d'une généralisation en huit dimensions des nombres complexes.

Ensemble de Mandelbrot tricomplexe ($\mathcal{M}_3$)

L'**ensemble de Mandelbrot tricomplexe** correspond aux nombres tricomplexes c_0 pour lesquels la suite définie par la récurrence

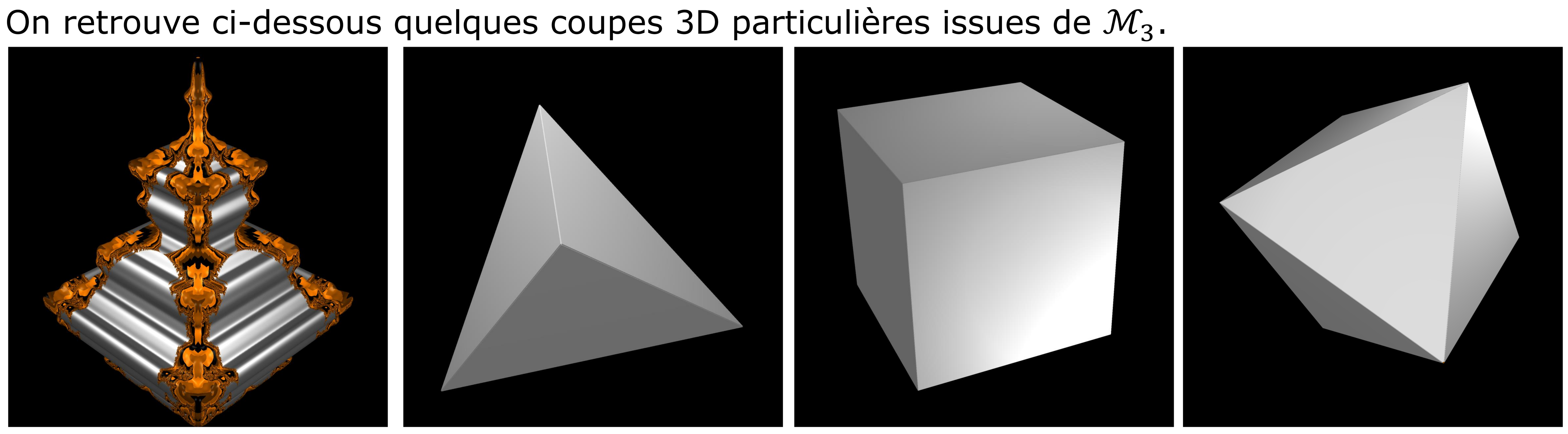
$$c_{m+1} = c_m^2 + c_0$$

reste bornée. À l'image des nombres qui le composent, $\mathcal{M}_3$ possède donc huit dimensions.

Quelques coupes tridimensionnelles particulières

Afin de visualiser $\mathcal{M}_3$, on peut générer une coupe 3D en choisissant trois composantes distinctes $\mathbf{i_k}$, $\mathbf{i_l}$ et $\mathbf{i_m}$ parmi les huit qui forment tout nombre tricomplexe. Ainsi, la **coupe tridimensionnelle** de $\mathcal{M}_3$ associée à $\mathbf{i_k}$, $\mathbf{i_l}$ et $\mathbf{i_m}$ est l'ensemble des nombres $c \in \mathbb{TC}$ ayant la forme $c = w\mathbf{i_k} + x\mathbf{i_l} + y\mathbf{i_m}$, où $w, x, y \in \mathbb{R}$, qui sont dans $\mathcal{M}_3$.

On retrouve ci-dessous quelques coupes 3D particulières issues de $\mathcal{M}_3$.



$\mathcal{T}(1,\mathbf{i_1},\mathbf{i_2})$: le Tetrabrot. $\mathcal{T}(\mathbf{i_1i_2},\mathbf{i_1i_3},\mathbf{i_2i_3})$: le Firebrot. $\mathcal{T}_e(\gamma_1\gamma_3,\overline{\gamma_1}\gamma_3,\gamma_1\overline{\gamma_3})$: l'Earthbrot. $\mathcal{T}(1,\mathbf{i_1i_2},\mathbf{i_1i_3})$: l'Airbrot.

Fig. 3 : Quatres coupes tridimensionnelles issues du Mandelbrot tricomplexe.

On peut également générer un solide très particulier à partir de $\mathcal{M}_3$ qui est connu sous le nom **d'octaèdre étoilé** ou Merkabah. La différence entre ce solide et les coupes 3D précédentes réside dans le fait qu'il faut générer deux coupes tridimensionnelles dans le même système d'axes, et ce de manière simultanée, pour le visualiser.

Il est intéressant de remarquer que les deux coupes tridimensionnelles en question correspondent précisément au Firebrot (Fig. 3) et à son dual géométrique. On peut obtenir ce dernier en inversant le signe de la deuxième composante du Firebrot, ce qui a pour effet d'inverser l'orientation de l'axe.

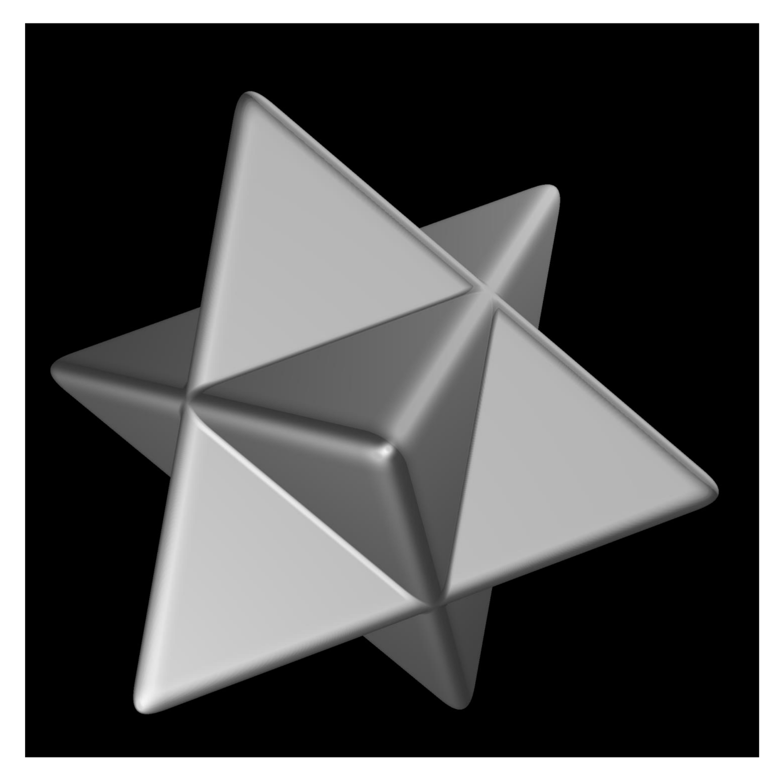


Fig. 4 : Le Starbrot.

Théorème

Le Firebrot, l'Earthbrot, l'Airbrot et le Starbrot correspondent respectivement à un tétraèdre régulier, un hexaèdre régulier, un octaèdre régulier et un octaèdre étoilé.

Conclusion

Nous avons constaté que contrairement à son analogue bidimensionnel, certaines coupes 3D de l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe ne possèdent aucun relief fractal et correspondent plutôt à divers polyèdres réguliers. Dans de futurs travaux, il serait intéressant d'étudier la structure des ensembles de Julia en relation avec ces coupes tridimensionnelles particulières afin d'établir s'ils présentent des attributs similaires.

Références principales

[1] D. Rochon et V. Garant-Pelletier : On a generalized Fatou-Julia theorem in multicomplex spaces, *Fractals, Vol. 17 (3)*, pp. 241-255, 2008.

[2] D. Rochon : A generalized Mandelbrot set for bicomplex numbers, *Fractals, Vol. 8 (4)*, pp. 355-368, 2000.