Classification des coupes tridimensionnelles de l'ensemble de Mandelbrot généralisé

Guillaume Brouillette

Superviseur : Dominic Rochon

Université du Québec à Trois-Rivières

Fonds de recherche Nature et technologies Québec

Introduction

Les fractales sont des formes géométriques ayant des propriétés très particulières. En plus d'être extrêmement irrégulières, elles sont, dans la majorité des cas, auto-similaires. Il est possible de générer certaines fractales, comme l'ensemble de Mandelbrot, en utilisant l'itération de nombres complexes. De plus, en introduisant les nombres multicomplexes, on peut obtenir plusieurs généralisations en trois dimensions de ces fractales.

Objectif. Généraliser l'ensemble de Mandelbrot en trois dimensions et classer les différentes coupes tridimensionnelles ainsi obtenues.

Ensemble de Mandelbrot

Nombres complexes

Définissons un nombre imaginaire i tel que

$$i^2 = -1.$$

Un nombre complexe c s'écrit

$$c = x + yi$$

où x et y sont des nombres réels. Ces nombres sont donc représentés en deux dimensions.

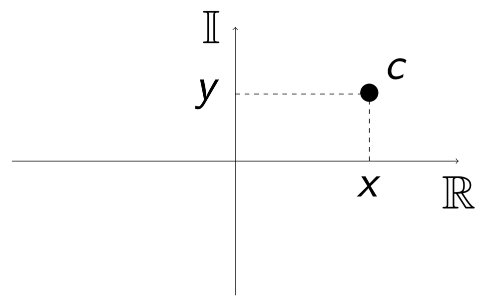

Fig. 1: Représentation d'un nombre complexe.

On définit l'**ensemble de Mandelbrot** $\mathcal{M}$ comme étant l'ensemble des nombres complexes c_0 tels que la suite $c_{m+1} = c_m^2 + c_0$ reste bornée.

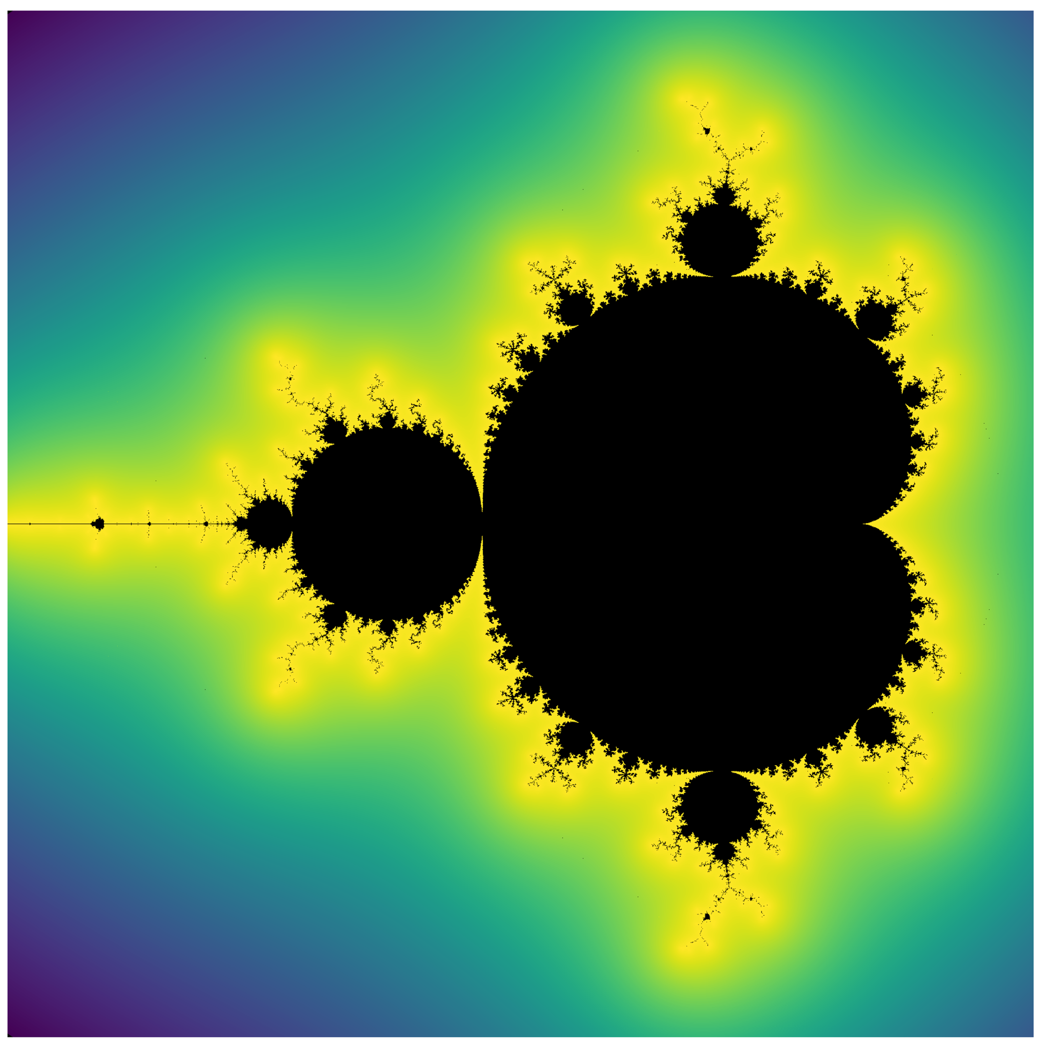

Fig. 2: Ensemble de Mandelbrot.

Généralisation

Nombres n-complexes

Utilisons n nombres imaginaires i_1, i_2, ..., i_n. On obtient ainsi un nombre n-complexe à 2^n composantes réelles. Par exemple, pour $n = 2$,

$$\eta = x_1 + x_2 i_1 + x_3 i_2 + x_4 i_1 i_2.$$

Remarquons l'apparition d'unités **hyperboliques**, *i.e.* des unités comme $i_1 i_2$ telles que $(i_1 i_2)^2 = +1$.

Ensemble de Mandelbrot généralisé

L'**ensemble de Mandelbrot généralisé** aux nombres n-complexes $\mathcal{M}_n$ est obtenu en considérant tous les nombres n-complexes c_0 tels que la suite

$$c_{m+1} = c_m^2 + c_0$$

reste bornée.

Coupes tridimensionnelles

Comme $\mathcal{M}_n$ possède 2^n dimensions, on ne peut pas visualiser cette fractale. Cependant, on peut générer des coupes 3D.

Coupe 3D

Considérons trois unités réelles, imaginaires ou hyperboliques $\mathbf{i_k}$, $\mathbf{i_l}$ et $\mathbf{i_m}$. La **coupe tridimensionnelle** de $\mathcal{M}_n$ associée à $\mathbf{i_k}$, $\mathbf{i_l}$ et $\mathbf{i_m}$ est l'ensemble des nombres ayant la forme $c = w\mathbf{i_k} + x\mathbf{i_l} + y\mathbf{i_m}$, où $w, x, y \in \mathbb{R}$, qui sont dans $\mathcal{M}_n$.

Pour obtenir une coupe 3D, il faut donc choisir trois unités $\mathbf{i_k}$, $\mathbf{i_l}$ et $\mathbf{i_m}$ parmi les 2^n existantes. Par exemple, dans le cas tricomplexe (n=3), on obtient un total de

$$\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$$

choix possibles.

Pourtant, il n'existe que 8 coupes différentes de $\mathcal{M}_3$. Elles sont les suivantes, où $j_1 = i_1 i_2$, $j_2 = i_1 i_3$ et $j_3 = i_2 i_3$ (voir figure 3) :

1. $\mathcal{T}(1, i_1, i_2)$;
2. $\mathcal{T}(1, i_1, j_1)$;
3. $\mathcal{T}(i_1, j_1, j_2)$;
4. $\mathcal{T}(1, j_1, j_2)$;
5. $\mathcal{T}(j_1, j_2, j_3)$;
6. $\mathcal{T}(i_1, i_2, j_1)$;
7. $\mathcal{T}(i_1, i_2, i_3)$;
8. $\mathcal{T}(i_1, i_2, j_2)$.

Fig. 3: Les huit coupes 3D de l'ensemble de Mandelbrot généralisé.

Équivalence entre certaines coupes

Dépendant des trois unités choisies, on obtient les mêmes coupes 3D. Ceci s'explique par la **dynamique** de la suite $\{c_m\}_{m=1}^{\infty}$.

Dynamique identique

Exemple. Considérons les coupes $\mathcal{T}(1, i_1, i_2)$ et $\mathcal{T}(1, i_1, i_3)$. Si $c_0 = w + xi_1 + yi_2$, on calcule que

$$c_0^2 = (w^2 - x^2 - y^2) + 2wxi_1 + 2wyi_2 + 2xyi_1i_2.$$

Si $c_0 = w + xi_1 + yi_3$,

$$c_0^2 = (w^2 - x^2 - y^2) + 2wxi_1 + 2wyi_3 + 2xyi_1i_3.$$

Il suffit de remplacer i_2 dans la première expression par i_3 pour obtenir la deuxième. Les coupes $\mathcal{T}(1, i_1, i_2)$ et $\mathcal{T}(1, i_1, i_3)$ ont donc la même dynamique.

Contre-exemple. Considérons maintenant les coupes $\mathcal{T}(i_1, i_2, j_1)$ et $\mathcal{T}(i_1, i_2, j_2)$. On voit que si $c_0 = wi_1 + xi_2 + yi_1i_2$,

$$c_0^2 = (-w^2 - x^2 + y^2) + 2wxi_1i_2 - 2wyi_2 - 2xyi_1.$$

On constate qu'aucune nouvelle unité n'est apparue. Cependant, si $c_0 = wi_1 + xi_2 + yi_1i_3$,

$$c_0^2 = (-w^2 - x^2 + y^2) + 2wxi_1i_2 - 2wyi_3 + 2xyi_1i_2i_3.$$

Les unités i_1i_2, i_3 et $i_1i_2i_3$ sont apparues. Ici, les coupes $\mathcal{T}(i_1, i_2, j_1)$ et $\mathcal{T}(i_1, i_2, j_2)$ n'ont pas la même dynamique.

On peut vérifier que, au-delà des nombres tricomplexes, il existe une dynamique supplémentaire. Cependant, la coupe issue de celle-ci est un octaèdre, ce qu'on peut déjà retrouver dans l'espace tricomplexe (coupe $\mathcal{T}(1, j_1, j_2)$, figure 3). On obtient donc le résultat suivant.

Théorème

L'ensemble de Mandelbrot généralisé $\mathcal{M}_n$ ne possède que huit coupes tridimensionnelles visuellement différentes.

Conclusion

On a vu que l'ensemble de Mandelbrot généralisé ne possède que quelques coupes 3D. Ainsi, on voit qu'il n'est pas nécessaire de généraliser cette fractale au-delà des nombres tricomplexes pour obtenir toutes les coupes. Dans de prochains travaux, il serait intéressant d'étudier d'autres types de fractales, comme les ensembles de Julia, dont les coupes tridimensionnelles n'ont pas encore été étudiées exhaustivement.

Références principales

[1] Guillaume Brouillette et Dominic Rochon : Characterization of the principal 3D slices related to the multicomplex Mandelbrot set. *arXiv e-prints*, (arXiv :1809.02020 [math.DS]), septembre 2018. Soumis.

[2] Dominic Rochon : A generalized Mandelbrot set for bicomplex numbers. *Fractals*, 8(4):355–368, 2000.