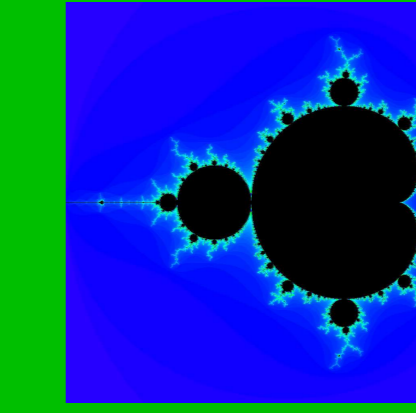


Pierre-Olivier Parisé

Supervisé par Prof. Dominic Rochon, DMI



Introduction

En 1980, un regain d'intérêt pour l'étude de deux mathématiciens Gaston Julia et Pierre Fatou se fait sentir grâce au mathématicien Benoît Mandelbrot. Ce dernier élabore la géométrie fractale. Ce domaine est l'étude des objets très irréguliers, fragmentés et qui possèdent des propriétés similaires à toutes les échelles. Cette branche des mathématiques a aujourd'hui de nombreuses applications en physique, en biologie et en ingénierie.

Ce regain provient du fait que B. Mandelbrot illustre pour la première fois à l'aide d'un ordinateur l'ensemble qui porte son nom : l'ensemble de Mandelbrot (l'image dans le titre). Cet ensemble est difficile à comprendre vu sa complexité, mais des techniques de la théorie des systèmes dynamiques complexes en permettent une étude approfondie.

En 1990, Peter Senn s'intéresse aux nombres hyperboliques pour redéfinir l'ensemble de Mandelbrot. L'image générée par un ordinateur n'avait plus rien à voir avec la structure complexe de l'ensemble de Mandelbrot, elle semblait être un carré. Wolfgang Metzler a montré en 1994 que c'est le cas.

En 2009, Dominic Rochon et Vincent Garant-Pelletier développent une méthode afin de visualiser l'ensemble de Mandelbrot en huit dimensions. En cisillant l'objet en tranches tridimensionnelles, ils ont découvert un octaèdre régulier.

À tout récemment, de nouveaux résultats ont été obtenus sur les ensembles de Mandelbrot généralisés, aussi appelés **Multibrot**. L'objectif de cette affiche est de présenter ces résultats le plus fidèlement possible.

Buts

- Caractériser l'intersection réelle des ensembles multibrots.
- Démontrer que les ensembles de Mandelbrot d'ordre p définis à l'aide des nombres hyperboliques sont tous des carrés.
- Montrer que la coupe strictement hyperbolique d'un Multibrot défini à l'aide des nombres tricomplexes est un octaèdre régulier.

Préliminaires

Nombres tricomplexes

Un **nombre tricomplexe** $\eta \in \mathbb{M}(3)$ est défini comme suit

$$\eta = x_1 + x_2 \mathbf{i}_1 + x_3 \mathbf{i}_2 + x_4 \mathbf{i}_3 + x_5 \mathbf{i}_4 + x_6 \mathbf{j}_1 + x_7 \mathbf{j}_2 + x_8 \mathbf{j}_3 \quad (x_i \text{ réels}) \quad (1)$$

où $\mathbf{i}_4 = \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3$, $\mathbf{i}_1^2 = \mathbf{i}_2^2 = \mathbf{i}_3^2 = \mathbf{i}_4^2 = -1$ et $\mathbf{j}_1^2 = \mathbf{j}_2^2 = \mathbf{j}_3^2 = 1$. $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3$ sont les unités hyperboliques. Le **module** (ou longueur) d'un nombre tricomplexe η est défini par

$$\|\eta\|_3 := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2}. \quad (2)$$

Itérées du polynôme

Soit la fonction $Q_{p,c}(\eta) = \eta^p + c$ où $p \geq 2$ est un entier. La **n -ième itération** est:

$$Q_{p,c}^n(\eta) := \underbrace{(Q_{p,c} \circ Q_{p,c} \circ \dots \circ Q_{p,c})}_{n \text{ fois composée ou répétée}}(\eta) = Q_{p,c}(Q_{p,c}(\dots(Q_{p,c}(\eta))\dots)). \quad (3)$$

Résultats et méthodes

D'une manière générale, nos résultats portent sur des sous-espaces de l'ensemble de Mandelbrot d'ordre p généralisés aux nombres tricomplexes. Il est défini comme suit :

$$\mathcal{M}_3^p := \{c \in \mathbb{M}(3) : \{Q_{p,c}^n(0)\}_{n=1}^\infty \text{ est bornée}\}. \quad (4)$$

Multibrot complexe

Le Multibrot complexe est défini par

$$\mathcal{M}^p := \{c = x_1 + x_2 \mathbf{i}_1 : c \in \mathcal{M}_3^p\}. \quad (5)$$

Théorème 1. Si $p \geq 2$ est un entier impair, alors

$$\mathcal{M}^p \cap \mathbb{R} = [-m_p, m_p]$$

où $m_p := \frac{p-1}{p^{p/(p-1)}}$.

La preuve demande une étude approfondie des solutions de l'équation $z^p - z + c = 0$ (voir [1]). Aussi, d'une manière plus « simple », il a été démontré que (voir [2])

Théorème 2. Si $p \geq 2$ est un entier pair, alors

$$\mathcal{M}^p \cap \mathbb{R} = [-2^{1/(p-1)}, m_p].$$

Multibrot hyperbolique

Le Multibrot hyperbolique est défini par

$$\mathcal{H}^p := \{c = x_1 + x_6 \mathbf{j}_1 : c \in \mathcal{M}_3^p\}. \quad (6)$$

Le théorème 1 permet de démontrer la caractérisation suivante:

Théorème 3. Si $p \geq 2$ est un entier impair, alors

$$\mathcal{H}^p = \{c = x + y \mathbf{j}_1 : |x| + |y| \leq m_p\}.$$

Puis, le théorème 2 a conduit à cette autre caractérisation:

Théorème 4. Si $p \geq 2$ est un entier pair, alors

$$\mathcal{H}^p = \left\{c = x + y \mathbf{j}_1 : |x - t_p| + |y| \leq \frac{l_p}{2}\right\}$$

où $t_p := \frac{-p[(2p)^{1/(p-1)} - 1] - 1}{2p^{p/(p-1)}}$ et $l_p := \frac{p[(2p)^{1/(p-1)} + 1] - 1}{p^{p/(p-1)}}$.

Les preuves des théorèmes 3 et 4 sont disponibles dans [1], [2], [3], [4]. Ces deux derniers théorèmes indiquent que \mathcal{H}^p est un carré quelque soit l'entier $p \geq 2$.

Pour les initiés, la suite $\{\mathcal{H}^p\}_{p=2}^\infty$ tend, selon la distance de Hausdorff, vers un carré de demi-diagonale de longueur un (appelé unitaire). La figure suivante illustre ce phénomène où le carré blanc correspond à l'ensemble limite.

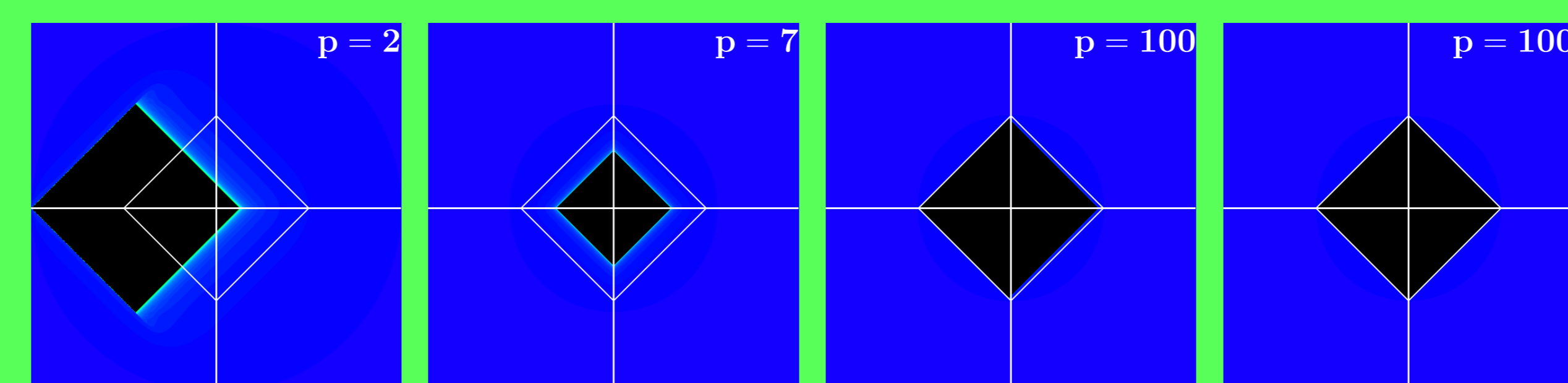


Fig. 1: Limites des carrés \mathcal{H}^p lorsque $p \rightarrow \infty$

Résultats et méthodes (suites)

Multibrot hyperbolique 3-D

Le Multibrot hyperbolique 3-D, aussi appelé le Perplexbrot, est défini par

$$\mathcal{P}^p := \{c = x_1 + x_6 \mathbf{j}_1 + x_7 \mathbf{j}_2 : c \in \mathcal{M}_3^p\}. \quad (7)$$

Théorème 5. Pour tout entier impair $p \geq 2$,

$$\mathcal{P}^p = \bigcup_{y \in [-m_p, m_p]} \{(\mathcal{H}^p - y \mathbf{j}_1) \cap (\mathcal{H}^p + y \mathbf{j}_1)\} + y \mathbf{j}_2$$

On retrouve un résultat analogue pour les entiers p pairs.

Théorème 6. Pour tout entier pair $p \geq 2$,

$$\mathcal{P}^p = \bigcup_{y \in [-\frac{l_p}{2}, \frac{l_p}{2}]} \{(\mathcal{H}^p - y \mathbf{j}_1) \cap (\mathcal{H}^p + y \mathbf{j}_1)\} + y \mathbf{j}_2$$

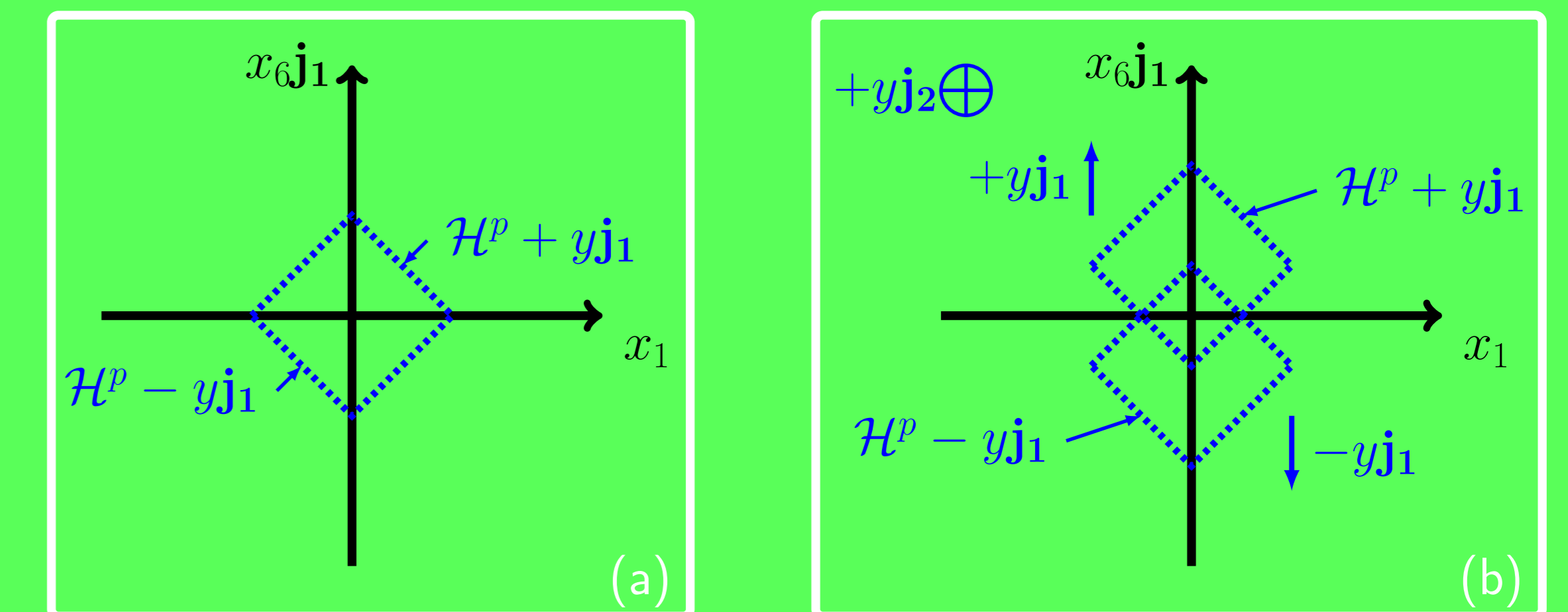


Fig. 2: Interprétation géométrique des formules avec (a) $y = 0$ et (b) $y \neq 0$

La suite $\{\mathcal{P}^p\}_{p=2}^\infty$ a aussi un ensemble limite. La figure suivante illustre le processus. La structure grise représente le squelette de l'ensemble limite qui est un octaèdre unitaire.

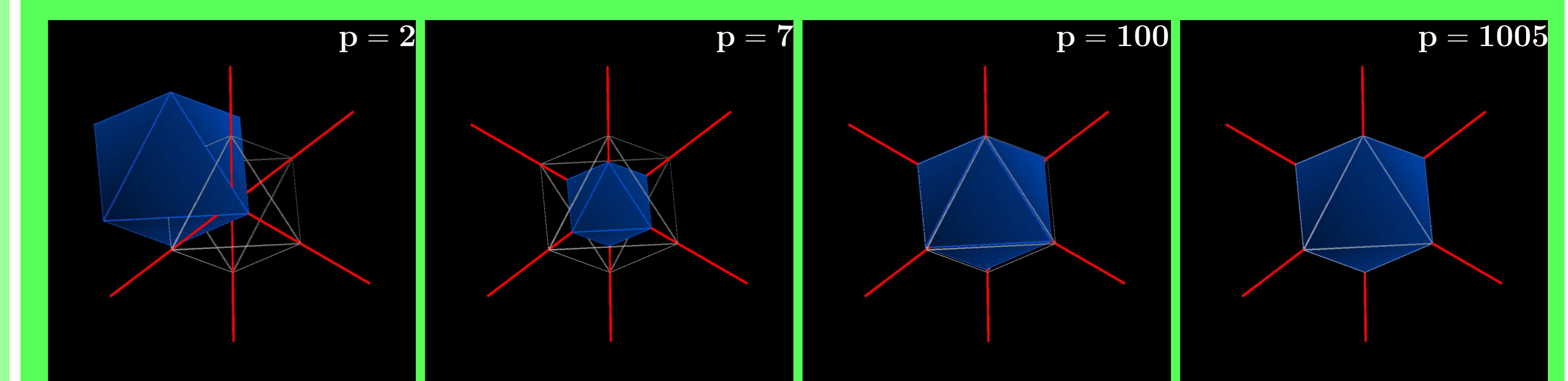


Fig. 3: Limites des octaèdres \mathcal{P}^p lorsque $p \rightarrow \infty$

Conclusion

En conclusion, il est surprenant de retrouver des objets réguliers dans une structure a priori fractale. Ils peuvent servir à déceler des systèmes dynamiques physiques ou écologiques stables. Dans de futurs travaux, d'autres solides réguliers sont à explorer.

Références

1. PARISÉ, P.-O. & ROCHON, D. Tricomplex dynamical systems generated by polynomials of odd degree. (soumis). Preprint : arXiv :1511.02249 (2015).
2. PARISÉ, P.-O., RANSFORD, T. & ROCHON, D. Tricomplex dynamical systems generated by polynomials of even degree. (preprint) (2016).
3. GARANT-PELLETIER, V. & ROCHON, D. On a Generalized Fatou-Julia Theorem in Multicomplex Spaces. *Fractals* **17**, 241–255 (2008).
4. PARISÉ, P.-O. & ROCHON, D. A Study of Dynamics of the Tricomplex Polynomial $\eta^p + c$. *NonLinear Dynam.* **82**, 157–171 (2014).
5. PRICE, G. B. *An Introduction To Multicomplex Spaces And Functions* (Marcel Dekker, INC, Monographs, textbooks on pure et applied mathematics, 1991).