Université de Montréal

Sur une généralisation des nombres complexes: les tétranombres

Par

Dominic Rochon

Département de mathématiques & de Statistiques
Faculté des Arts et des Sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M. Sc.)
en **mathématiques fondamentales**

20 août 1997

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:

Sur une généralisation des nombres complexes: Les tétranombres

Présenté par

Dominic Rochon
a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

Paul Gauthier
Directeur de recherche
Université de Montréal

Walter Hengartner
Codirecteur de recherche
Université de Montréal

Jean-Marc Terrier
Juge

Q. I. Rahman
Juge

Mémoire accepté le : 14 novembre 1997 .

À Ramdam

« Celui dont le cri fait trembler les montagnes »

Le véritable esprit de joie, d'exaltation, le sentiment d'être plus qu'un homme, qui sont la pierre de touche de l'excellence la plus haute, se trouve dans les mathématiques comme dans la poésie.

-Bertrand Russel

Sur une généralisation des nombres complexes: les tétranombres

Dominic Rochon

Sommaire

Le but de ce mémoire est de présenter une structure mathématiques généralisant les nombres complexes. Les éléments de cette structure seront ici considérés comme de nouveaux nombres et appelés « *tétranombres* ».

Différente des quaternions [4], qui se veulent la généralisation standard des nombres complexes, la structure présentée dans ce mémoire dote $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2$ d'une multiplication commutative dans le but de permettre une extension de l'analyse complexe dans $\mathbb{C}$ et une particularisation de l'analyse complexe dans $\mathbb{C}^2$.

Les tétranombres se voudront aussi une généralisation de ce que Sobczyk dans [14] présente comme les nombres hyperboliques. Ainsi, en plus de généraliser plusieurs résultats de l'analyse complexe dans $\mathbb{C}$, les tétranombres généralisent certains résultats obtenus dnas le cas des nombres hyperboliques.

Il faut aussi préciser que la structure présentée ici a déjà été traitée dans un contexte plus général par Ryan dans [12]. Par contre, la plupart des résultats rencontrés dans ce mémoire seront différents ou plus précis que ceux rencontrés dans [12], car le caractère « général » de l'article de Ryan n'a pas permis de faire ressortir le caractère « commutatif » de la structure présentée dans ce mémoire.

Table des matières

Introduction

Les tétranombres sont une généralisation des nombres complexes différente de celle rencontrée avec les quaternions. L'idée intuitive est simple ; il suffit de considérer une entité de la forme $a+b\mathbf{i}$, mais cette fois avec a et b éléments des nombres complexes, *i.e.* $a+b\mathbf{i}$ avec $a, b \in \mathbb{C}$.

Mais, alors on se retrouve avec une expression de la forme $(e+f\mathbf{i})+(g+h\mathbf{i})\mathbf{i}$ avec $e, f, g, h \in \mathbb{R}$. Et écrit de cette façon, c'est encore un nombre complexe ; c'est $(e-h)+(f+g)\mathbf{i}$. Donc, pour garder l'idée d'une généralisation, il nous faudra utiliser une notation qui ne nous ramène pas aux nombres complexes. Plus loin, nous verrons une notation pour les tétranombres qui nous permettra de rester fidèles à l'intuition initiale. Mais d,abord, pour plus de rigueur, il nous faut formaliser la structure à l'aide d'une notation vectorielle ; celle-ci aura aussi son utilisé, car elle nous permettra de considérer les tétranombres comme des éléments de $\mathbb{R}^4$.

Formellement, un nombre complexe est un coule ordonné de nombres réels ; l'égalité, l'addition et la multiplication de nombres complexes sont définies de la manière suivante :

$$\begin{gathered}(a, b)=(c, d) \quad \text{si, et seulement si,} \quad a=c \text{ et } b=d,\\ (a, b)+(c, d)=(a+c, b+d)\\ \text{et } (a, b)(c, d)=(ac-bd, ad+bc).\end{gathered}$$

On pourrait donc écrire le nombre $(e+f\mathbf{i})+(g+h\mathbf{i})\mathbf{i}$ comme le « vecteur » $((e, f),(g, h))$. Mais à ce stade-ci, il n'y a rien de défini. Par contre, on se rend compte que la structure va reposer sur une définition adéquate de la multiplication.

Intuitivement, nous voulons une multiplication analogue à celle des nombres complexes. Nous allons donc considérer les vecteurs (a, b), (c, d), (e, f), $(g, h) \in \mathbb{C}$ avec la multiplication suivante :

$$\begin{aligned}((a, b),(c, d)) \times((e, f),(g, h)) &=[(a, b)(e, f)-(c, d)(g, h);(a, b)(g, h)+(c, d)(e, f)]\\ &=[(ae-bf-cg+dh, af+be-ch-dg);(ag-bh+ce-df, ah+bg+cf+de)].\end{aligned}$$

Il serait donc légitime de considérer formellement la multiplication suivante :

$$(a, b, c, d) \cdot (e, f, g, h) =$$
$$(ae - bf - cg + dh,\ af + be - ch - dg, ag - bh + ce - df,\ ah + bg + cf + de).$$

On peut donc définir formellement les tétranombres.

Chapitre

1 Propriétés de base

Dans ce chapitre, on définira formellement l'ensemble des tétranombres pour explorer par la suite ses propriétés de bas et deux sortes de conjugués.

Définition 1.1. Un tétranombre est un vecteur de $\mathbb{R}^4$ dont l'égalité, l'addition et la multiplication sont définies de la manière suivante :

$$(a, b, c, d) = (e, f, g, h) \quad \text{si, et seulement si,} \quad a = e,\ b = f,\ c = g \text{ et } d = h,$$
$$(a, b, c, d) + (e, f, g, h) = (a + e, b + f, c + g, d + h)$$
$$\text{et } (a, b, c, d) \cdot (e, f, g, h) = (ae - bf - cg + dh,\ af + be - ch - dg, ag - bh + ce - df,$$
$$ah + bg + cf + de).$$

Cette définition englobe celle des nombres complexes.

Définition 1.2. Un nombre complexe est un tétranombre de la forme (a, b, c, d) ou $b, d = 0$. Aussi, le vecteur $(a, 0, c, 0)$ sera noté $a + c\mathbf{i}$.

Cette définition est légitime, car les nombres complexes définis (par cette définition) sont isomorphes aux nombres complexes déjà connus. Pour voir cela, il suffit simplement de remarquer que $(a, 0, c, 0) \cdot (e, 0, g, 0) = (ae - cg, 0, 0, ag + ce, 0)$.

Aussi, comme conséquence de la définition 1.2, on note que les nombres réels sont de la forme suivante : $(a, 0, 0, 0)$ où $a \in \mathbb{R}$. De plus, comme dans le cas des nombres réels ou complexes, le « $\cdot$ » représentant la multiplication des tétranombres sera souvent omis.

Définition 1.3. Un nombre complexe *prime* est un tétranombre (a, b, c, d) où $c = d = 0$. Aussi, le vecteur $(a, b, 0, 0)$ sera noté $a + b\mathbf{i}'$.

Les nombres de la forme $(a, b, 0, 0)$ sont aussi isomorphes aux nombres complexes habituels, car $(a, b, 0, 0) \cdot (e, f, 0, 0) = (ae - bf, af + be, 0, 0)$.

Notations :

— L'ensemble des tétranombres sera noté $\mathbb{T}$.

— L'ensemble des nombres complexes sera noté $\mathbb{C}$.

— L'ensemble des nombres complexes primes sera noté $\mathbb{C}'$.

— L'ensemble des nombres réels sera noté $\mathbb{R}$.

Voici maintenant d'autres façons équivalentes de représenter les tétranombres, celles-ci seront utilisées par la suite sans distinction. Les voici :

1) De façon analogue aux quaternions

$$\mathbb{T} = \left\{a + b\mathbf{i}' + c\mathbf{i} + d\mathbf{j} \;:\; \mathbf{i}^2 = \mathbf{i}'^2 = -1,\, \mathbf{j}^2 = 1 \text{ et } \mathbf{ij} = -\mathbf{i}',\, \mathbf{i}'\mathbf{j} = -\mathbf{i},\, \mathbf{ii}' = \mathbf{j} \text{ où } a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}.$$

Ainsi, $w = (a, b, c, d)" = "a+b\mathbf{i}'+c\mathbf{i}+d\mathbf{j}$, $\mathbb{C} = \{a + c\mathbf{i} \;:\; a, c \in \mathbb{R}\}$ et $\mathbb{C}' = \{a + b\mathbf{i}' \;:\; a, b \in \mathbb{R}\}$. Avec cette représentation, on voit bien que les tétranombres sont une généralisation des nombres complexes. Aussi, on constate que c'est ne même temps une généralisation des nombres doubles (ou hperobliques), *i.e.* les nombres de la forme $a + b\mathbf{j}$ où $\mathbf{j}^2 = 1$.

2) Comme $\mathbb{C}^2$ munie d'une multiplication

$$\mathbb{T} = \left\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \;:\; z_1, z_2 \in \mathbb{C}\right\}$$

où $w_1 \cdot w_2 = (z_1, z_2) \cdot (z_3, z_4) = (z_1z_3 - z_2z_4, z_1z_4 + z_2z_3)$. Ainsi, $w = (a, b, c, d)$ "=" $(a+b\mathbf{i}, c+d\mathbf{i}')$.

Remarques 1. **i)** Il sera plus utile par la suite de voir cette définition comme des couples dans $\mathbb{C}'$. Ainsi, $w = (a, b, c, d)$ "=" $(a + b\mathbf{i}', c + d\mathbf{i}')$.

ii) La multiplication considérée est analogue à celle des nombres complexes.

▲

3) Comme complexification des nombres complexes :

$$\mathbb{T} := \{z_1 + z_2\mathbf{i} \;:\; z_1, z_2 \in \mathbb{C}'\}$$

où $(z_1 + z_2\mathbf{i}) \cdot (z_3 + z_4\mathbf{i}) = (z_1z_3 - z_2z_4) + (z_1z_4 + z_2z_3)\mathbf{i}$. Ainsi, $w = (a, b, c, d)$ "=" $(a + b\mathbf{i}') + (c + d\mathbf{i}')\mathbf{i}$.

Venons-en aux propriétés algébriques de $\mathbb{T}$.

Propriété 1.1. L'addition est associative, *i.e.*

$$(w_1 + w_2) + w_3 = w_1 + (w_2 + w_3) \quad \forall w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{T}.$$

Propriété 1.2. L'addition a un élément neutre, noté 0 et appelé zéro, *i.e.* $w + 0 = 0 + w = w$ $\forall w \in \mathbb{T}$.

Propriété 1.3. Chaque élément $w \in \mathbb{T}$ possède un inverse, noté $-w$, par rapport à w, *i.e.* $w + (-w) = (-w) + w = 0$ $\forall w \in \mathbb{T}$.

Propriété 1.4. L'addition est commutative, *i.e.* $w_1 + w_2 = w_2 + w_1$ $\forall w_1, w_2 \in \mathbb{T}$.

Les propriétés précédentes sont évidentes, car elles le sont dans $\mathbb{R}^4$. Celles qui vont suivre sont spécifique à $\mathbb{T}$.

Propriété 1.5. La multiplication est associative, *i.e.*

$$w_1 \cdot (w_2 \cdot w_3) = (w_1 \cdot w_2) \cdot w_3 \quad \forall w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{T}.$$

Démonstration.
Posons $w_1 = z_1 + z_2\mathbf{i}$, $w_2 = z_3 + z_4\mathbf{i}$ et $w_3 = z_5 + z_6\mathbf{i}$. Alors

$$\begin{aligned} w_1(w_2w_3) &= (z_1 + z_2\mathbf{i})\left((z_3 + z_4\mathbf{i})(z_5 + z_6\mathbf{i})\right) \\ &= (z_1 + z_2\mathbf{i})\left((z_3z_5 - z_4z_6) + (z_3z_6 + z_4z_5)\mathbf{i}\right) \\ &= \left((z_1z_3z_5 - z_1z_4z_6) - (z_2z_3z_6 + z_2z_4z_5)\right) + \left((z_1z_3z_6 + z_1z_4z_5) + (z_2z_3z_5 - z_2z_4z_6)\mathbf{i}\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (w_1w_2)w_3 &= \left((z_1 + z_2\mathbf{i})(z_3 + z_4\mathbf{i})\right)(z_5 + z_6\mathbf{i}) \\ &= \left((z_1z_3 - z_2z_4) + (z_1z_4 + z_2z_3)\mathbf{i}\right)(z_5 + z_6\mathbf{i}) \\ &= \left((z_1z_3z_5 - z_2z_4z_5) - (z_1z_4z_6 + z_2z_3z_6)\right) + \left((z_1z_3z_6 - z_2z_4z_6) + (z_1z_4z_5 + z_2z_3z_5)\right)\mathbf{i}. \end{aligned}$$

□

Propriété 1.6. La multiplication est distributive par rapport à l'addition, *i.e.* $w_1 \cdot (w_2 + w_3) = w_1 \cdot w_2 + w_1 \cdot w_3$ et $(w_1 + w_2) \cdot w_3 = w_1 \cdot w_3 + w_2 \cdot w_3$.

Démonstration.
Il suffit de démontrer la distributivité à gauche $w_1 \cdot (w_2 + w_3) = w_1 \cdot w_2 + w_1 \cdot w_3$, car la distributivité à droite sera automatiquement vraie moyennant la propriété 1.7. Posons $w_1 = z_1 + z_2\mathbf{i}$, $w_2 = z_3 + z_4\mathbf{i}$ et $w_3 = z_5 + z_6\mathbf{i}$.

Alors,

$$\begin{aligned} w_1(w_2 + w_3) &= (z_1 + z_2\mathbf{i}) \cdot ((z_3 + z_5 + (z_4 + z_6)\mathbf{i}) \\ &= (z_1(z_3 + z_5) - z_2(z_4 + z_6)) + (z_1(z_4 + z_6) + z_2(z_3 + z_5))\,\mathbf{i} \\ &= (z_1z_3 + z_1z_5 - z_2z_4 - z_2z_6) + (z_1z_4 + z_1z_6 + z_2z_3 + z_2z_5)\,\mathbf{i} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} w_1w_2 + w_1w_3 &= (z_1 + z_2\mathbf{i})(z_3 + z_4\mathbf{i}) + (z_1 + z_2\mathbf{i})(z_5 + z_6\mathbf{i}) \\ &= (z_1z_3 - z_2z_4) + (z_1z_4 + z_2z_3)\mathbf{i} + (z_1z_5 - z_2z_6) + (z_1z_6 + z_2z_5)\mathbf{i} \\ &= (z_1z_3 - z_2z_4 + z_1z_5 - z_2z_6) + (z_1z_4 + z_2z_3 + z_1z_6 + z_2z_5)\mathbf{i}. \end{aligned}$$

□

Propriété 1.7. La multiplication est commutative, *i.e.* $w_1 \cdot w_2 = w_2 \cdot w_1 \ \forall w_1, w_2 \in \mathbb{T}$.

Démonstration.
Posons $w_1 = z_1 + z_2\mathbf{i}$ et $w_2 = z_3 + z_4\mathbf{i}$. Alors,

$$w_1w_2 = (z_1 + z_2\mathbf{i})(z_3 + z_4\mathbf{i}) = (z_1z_3 - z_2z_4) + (z_1z_4 + z_2z_3)\mathbf{i}$$

et

$$w_2w_1 = (z_3 + z_4\mathbf{i})(z_1 + z_2\mathbf{i}) = (z_3z_1 - z_4z_1) + (z_3z_2 + z_4z_1)\mathbf{i}.$$

□

Propriété 1.8. La multiplication a un élément neutre, noté 1 et appelé élément unité, *i.e.* $w = w \cdot 1 = 1 \cdot w \ \forall w \in \mathbb{T}$.

Démonstration.
La démonstration est évidente en prenant $1 = (1, 0, 0, 0)$. □

Mais ce ne sont pas tous les éléments de $\mathbb{T}$ qui possèdent un inverse multiplicatif. Exemple, $(1,-1,1,1)$ n'a pas d'inverse multiplicatif.

Pour le trouver, on va supposer le contraire. Supposons qu'il existe un $w = (a,b,c,d) \in \mathbb{T}$ tel que $w \cdot (1,-1,1,1) = 1$. Alors $(a,b,c,d)(1,-1,1,1) = (1,0,0,0)$, *i.e.*

$$(a+b-c+d, -a+b-c-d, a-b+c+d, a-b-c+d) = (1,0,0,0).$$

Ceci implique que

$$a+b-c+d = 1 \tag{1.1}$$
$$-a+b-c-d = 0 \tag{1.2}$$
$$a-b+c+d = 0 \tag{1.3}$$
$$a+b-c+d = 0. \tag{1.4}$$

Donc, $b = a + (a+b+d) + d$ et ainsi $a = -d$. On en déduit que $b = c$, ce qui implique une contradiction avec (1.1).

En conclusion, on peut affirmer que $\mathbb{T} = (\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ est un *anneau commutatif et unitaire*. Par contre, $\mathbb{T}$ n'est pas un corps, car se ne sont pas tous les éléments qui possèdent des inverses multiplicatifs.

Dans ce qui suit, deux sortes de conjugués vont être présentés. On constatera que ceux-ci ont des propriétés symétriques.

Conjugué .1. La première sorte de conjugaison est

$$\overline{(a,b,c,d)} = (a,b,-c,-d)$$

i.e. $\overline{z_1 + z_2\mathbf{i}} = z_1 - z_2\mathbf{i}$.

Il est à noter que $\overline{(a,0,c,0)} = (a,0,-c,0)$. Ceci généralise le conjugué de $\mathbb{C}$. De plus, si $w = (a,b,c,d)$, alors

$$w\overline{w} = (a^2 - b^2 + c^2 - d^2, 2ab - 2cd, 0, 0) \in \mathbb{C}'.$$

Puis, $w = (a,0,c,0) \in \mathbb{C}$ implique que

$$|w|^2 = w\overline{w} = (a^2 + c^2, 0, 0, 0) = a^2 + c^2 \in \mathbb{R}.$$

Donc, $\sqrt{w\overline{w}} = \sqrt{(a^2 + c^2, 0,0,0)} = \sqrt{a^2+c^2}$, ce qui est la norme de $\mathbb{C}$.

Remarque 1. Si $w = (a,b,c,d)$, on obtient que $w\overline{w} = (a + b\mathbf{i}')^2 + (c + d\mathbf{i}')^2 = z_1^2 + z_2^2$. ▲

Propriété 1.9. On a

$$\overline{w_1 + w_2} = \overline{w_1} + \overline{w_2} \quad \forall w_1, w_2 \in \mathbb{T}.$$

Démonstration.
Posons $w_1 = (a, b, c, d)$ et $w_2 = (e, f, g, h)$. Alors

$$\begin{aligned}\overline{w_1 + w_2} &= \overline{(a+e, b+f, c+g, d+h)} \\ &= (a+e, b+f, -c-g, -d-h) \\ &= (a, b, -c, -d) + (e, f, -g-h) = \overline{w_1} + \overline{w_2}.\end{aligned}$$

□

Propriété 1.10. On a

$$\overline{w_1 - w_2} = \overline{w_1} - \overline{w_2} \quad \forall w_1, w_2 \in \mathbb{T}.$$

Démonstration.
Posons $w_1 = (a, b, c, d)$ et $w_2 = (e, f, g, h)$. Alors

$$\begin{aligned}\overline{w_1 - w_2} &= \overline{(a-e, b-f, c-g, d-h)} \\ &= (a-e, b-f, g-c, h-d) \\ &= (a, b, -c, -d) - (e, f, -g, -h) = \overline{w_1} - \overline{w_2}.\end{aligned}$$

□

Propriété 1.11. On a une involution, *i.e.*

$$\overline{\overline{w}} = w \quad \forall w \in \mathbb{T}.$$

Démonstration.
Posons $w = (a, b, c, d)$. Alors $\overline{w} = (a, b, -c, -d)$ et $\overline{\overline{w}} = (a, b, c, d) = w$. □

Propriété 1.12. On a

$$\overline{w_1 \cdot w_2} = \overline{w_1} \cdot \overline{w_2}.$$

Démonstration.
Posons $w_1 = (a, b, c, d)$ et $w_2 = (e, f, g, h)$. Alors

$$w_1 w_2 = (ae - bf - cg + dh,\ af + be - ch - dg, ag - bh + ce - df,\ ah + bg + cf + de)$$

ce qui implique que

$$\overline{w_1 w_2} = (ae - bf - cg + dh,\ af + be - ch - dg, -ag + bh - ce + df,\ -ah - bg - cf - de).$$

Or,

$$\begin{aligned}\overline{w_1} \cdot \overline{w_2} &= (a, b, -c, -d) \cdot (e, f, -g, -h) \\ &= (ae - bf - cg + dh, af + be - ch - dg, -ag + bh - ce + df, -ah - bg - cf - de).\end{aligned}$$

□

Conjugué .2. Le deuxième conjugué est

$$\overbrace{(a, b, c, d)} = (a, -b, c, -d).$$

Il est à noter que $\overbrace{(a, b, c, d)} = (a, -b, 0, 0)$. Ce qui généralise le conjugué de $\mathbb{C}'$. De plus, si $w = (a, b, c, d)$, alors $w\overbrace{w} = (a^2 - c^2 + b^2 - d^2, 0, 2ac + 2bd, 0) \in \mathbb{C}$. Aussi, $w = (a, b, 0, 0) \in \mathbb{C}'$ implique que $|w|'^2 = w\overbrace{w} = (a^2 + b^2, 0, 0, 0) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$. Donc $\sqrt{w\overbrace{w}} = \sqrt{(a^2 + b^2, 0, 0, 0)} = \sqrt{a^2 + b^2}$, ce qui est la norme dans $\mathbb{C}'$.

Remarque 2. Si $w = (a, b, c, d)$, alors $w\overbrace{w} = (a + c\mathbf{i})^2 + (b + d\mathbf{i})^2$. ▲

Propriété 1.13. On a

$$\overbrace{w_1 + w_2} = \overbrace{w_2} + \overbrace{w_2} \quad \forall w_1, w_2 \in \mathbb{T}.$$

Démonstration.
Posons $w_1 = (a, b, c, d)$ et $w_2 = (e, f, g, h)$. Alors,

$$\begin{aligned}\overbrace{w_1 + w_2} &= \overbrace{(a + e, b + f, c + g, d + h)} \\ &= (a + e, -b - f, c + g, -d - h) \\ &= (a, -b, c, -d) + (e, -f, g, -h) = \overbrace{w_1} + \overbrace{w_2}.\end{aligned}$$

□

Propriété 1.14. On a

$$\overbrace{w_1 - w_2} = \overbrace{w_1} - \overbrace{w_2} \quad \forall w_1, w_2 \in \mathbb{T}.$$

Démonstration.
Posons $w_1 = (a, b, c, d)$ et $w_2 = (e, f, g, h)$. Alors

$$\begin{aligned} \overbrace{w_1 - w_2} &= \overbrace{(a-e, b-f, c-g, d-h)} \\ &= (a-e, f-b, c-g, h-d) \\ &= (a, -b, c, -d) - (e, -f, g, -h) = \overbrace{w_1} - \overbrace{w_2}. \end{aligned}$$

□

Propriété 1.15. On a une involution

$$\overbrace{\overbrace{w}} = w \quad \forall w \in \mathbb{T}.$$

Démonstration.
Posons $w = (a, b, c, d)$. Alors, $\overbrace{\overbrace{w}} = \overbrace{a, -b, c, -d)} = (a, b, c, d) = w$. □

Propriété 1.16. On a

$$\overbrace{w_1 w_2} = \overbrace{w_1}\,\overbrace{w_2} \quad \forall w_1, w_2 \in \mathbb{T}.$$

Démonstration.
Posons $w_1 = (a, b, c, d)$ et $w = (e, f, g, h)$. alors

$$w_1 w_2 = (ae - bf - cg + dh,\ af + be - ch - dg, ag - bh + ce - df,\ ah + bg + cf + de)$$

ce qui implique que

$$\overbrace{w_1 w_2} = (ae - bf - cg + dh,\ -af - be + ch + dg, ag - bh + ce - df,\ -ah - bg - cf - de).$$

Or,

$$\begin{aligned} \overbrace{w_1}\,\overbrace{w_2} &= (a, -b, c, -d)(e, -f, g, -h) \\ &= (ae - bf - cg + dh,\ -af - be + ch + dg, ag - bh + ce - df,\ -ah - bg - cf - de). \end{aligned}$$

□

Voici un récapitulatif des propriétés des deux conjugués introduits précédemment.

Récapitulatif : Les propriétés du conjugué $\overline{w}$:

1) $\overline{w_1 + w_2} = \overline{w_1} + \overline{w_2}$;
2) $\overline{w_1 - w_2} = \overline{w_1} - \overline{w_2}$;
3) $\overline{\overline{w}} = w$;
4) $\overline{w_1 w_2} = \overline{w_1 w_2}$.

Si $w = (a, b, c, d)$ "=" $z_1 + z_2\mathbf{i}$, alors

$$\begin{aligned} w\overline{w} &= (a^2 - b^2 + c^2 - d^2, 2ab + 2cd, 0, 0) \\ &= (a + b\mathbf{i}')^2 + (c + d\mathbf{i}')^2 = z_1^2 + z_2^2 \in \mathbb{C}'. \end{aligned}$$

Si $w = (a, 0, c, 0) = a + b\mathbf{i}$, alors $\overline{w} = (a, 0, -c, 0)$, *i.e.* $\overline{a + c\mathbf{i}} = a - c\mathbf{i}$. De plus, $w\overline{w} = (a^2 + c^2, 0, 0, 0)$, ainsi $\sqrt{w\overline{w}} = \sqrt{a^2 + c^2} = |a + b\mathbf{i}|$, *i.e.* la norme usuelle de $\mathbb{C}$.

Les propriétés du conjugué $\overbrace{w}$:

1) $\overbrace{w_1 + w_2} = \overbrace{w_1} + \overbrace{w_2}$;
2) $\overbrace{w_1 - w_2} = \overbrace{w_1} - \overbrace{w_2}$;
3) $\overbrace{\overbrace{w}} = w$;
4) $\overbrace{w_1 w_2} = \overbrace{w_1}\,\overbrace{w_2}$.

Si $w = (a, b, c, d)$, alors $w\overbrace{w} = (a^2 - c^2 + b^2 - d^2, 0, 2ac + 2bd, 0) = (a + c\mathbf{i})^2 + (b + d\mathbf{i})^2 \in \mathbb{C}$. Si $w = (a, b, 0, 0) = a + b\mathbf{i}'$, alors $\overbrace{w} = (a, -b, 0, 0)$, *i.e.* $\overbrace{a + b\mathbf{i}'} = a - b\mathbf{i}'$. De plus, $w\overbrace{w} = (a^2 + b^2, 0, 0, 0)$, ainsi $\sqrt{w\overbrace{w}} = \sqrt{a^2 + b^2} = |a + b\mathbf{i}'|'^2$, *i.e.* la norme usuelle de $\mathbb{C}'$.

Chapitre

2 Caractérisation de l'inverse

Dans ce chapitre, on caractérisera les éléments non-inversibles de l'ensemble des tétranombres. Par le fait même, on trouvera des structures algébriques isomorphes aux tétranombres.

Étant donné que $\mathbb{T}$ est un anneau unitaire commutatif, on sait que si $w \in \mathbb{T}$ possède un inverse, il sera nécessairement unique.

Démonstration.
Soit $w, w', w'' \in \mathbb{T}$ tels que $ww' = 1$ et $ww'' = 1$, où $1 = (1, 0, 0, 0)$. Alors

$$w'' = 1w'' = (w'w)w'' = w'(ww'') = w'1 = w'.$$

Ceci implique que $w' = w''$. Donc, si l'inverse existe, il est nécessairement unique. $\square$

Tous les nombres complexes et complexes primes non-nuls, *i.e.* les nombres de la forme $(a, 0, b, 0)$ et $(a, b, 0, 0)$ avec $a, b \neq 0$ sont inversibles, car ces structures sont isomorphes aux nombres complexes déjà connus. On a alors que

$$(a, 0, b, 0)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, 0, \frac{-b}{a^2 + b^2}, 0\right) \text{ et } (a, b, 0, 0)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}, 0, 0\right).$$

On sait aussi que dans $\mathbb{C}$, $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}}$. Essayons de trouver une formule similaire pour $\mathbb{T}$. Comme $w\overline{w} = (a^2 - b^2 + c^2 - d^2, 2ab + 2cd, 0, 0) \in \mathbb{C}'$, alors $(w\overline{w})\,\overbrace{(w\overline{w})} \in \mathbb{R}$. Il serait légitime, intuitivement, de poser :

$$w^{-1} = \frac{\overline{w}\overbrace{(w\overline{w})}}{(w\overline{w})\,\overbrace{(w\overline{w})}} \quad \text{si } (w\overline{w})\,\overbrace{(w\overline{w})} \neq 0.$$

Proposition 2.1. Soit $w_1, w_2 \in \mathbb{T}$. Si w_1 et w_2 sont inversibles, alors $w_1 \cdot w_2$ est aussi inversible et $(w_1 w_2)^{-1} = w_1^{-1} w_2^{-2}$.

Démonstration.
On a que

$$\begin{aligned}(w_1 w_2)(w_2^{-1} w_1^{-1}) &= w_1(w_2 w_2^{-1}) w_1^{-1} \\ &= w_1(1) w_1^{-1} \\ &= w_1 w_1^{-1} = 1.\end{aligned}$$

Donc, $(w_1 w_2)^{-1} = w_2^{-1} w_1^{-1} = w_1^{-1} w_2^{-1}$ par commutativité. $\square$

Proposition 2.2. Soit $w \in \mathbb{T}$. si w est inversible, alors $\overline{w}$ est aussi inversible et $\overline{w}^{-1} = \overline{w^{-1}}$.

Démonstration.
On a que $\overline{w} \cdot \overline{w^{-1}} = \overline{w \cdot w^{-1}} = \overline{1} = 1$, ce qui implique, par unicité de l'inverse, que $\overline{w}^{-1} = \overline{w^{-1}}$. $\square$

Proposition 2.3. soit $w \in \mathbb{T}$. Si w est inversible, alors $\overbrace{w}$ est aussi inversible et $\overbrace{w}^{-1} = \overbrace{w^{-1}}$.

Démonstration.
On a que

$$\begin{aligned}\overbrace{w} \cdot \overbrace{w^{-1}} &= \overbrace{w \cdot w^{-1}} \\ &= \overbrace{1} = 1.\end{aligned}$$

Par unicité de l'inverse, ceci implique que $\overbrace{w}^{-1} = \overbrace{w^{-1}}$. $\square$

Proposition 2.4. Si $(w\overline{w})(\overbrace{w\overline{w}}) \neq 0$, alors w est inversible et

$$w^{-1} = \frac{\overline{w}(\overbrace{w\overline{w}})}{(w\overline{w})(\overbrace{w\overline{w}})}.$$

Démonstration.
On a que

$$I = w \cdot \left[\frac{\overline{w}(\overbrace{w\overline{w}})}{(w\overline{w})(\overbrace{w\overline{w}})}\right] = w \cdot \left[\overline{w}(\overbrace{w\overline{w}})\right] \cdot \left[(w\overline{w})(\overbrace{w\overline{w}})\right]^{-1}.$$

De plus $(w\overline{w})(\widehat{w\overline{w}}) \in \mathbb{R}$, donc inversible si $(w\overline{w})(\widehat{w\overline{w}}) \neq 0$. Comme $(w\overline{w})(\widehat{w\overline{w}}) \neq 0$ par hypothèse, cela implique que $w\overline{w} \neq 0$ et $\widehat{w\overline{w}} \neq 0$. Cependant, comme $w\overline{w}$, $\widehat{w\overline{w}} \in \mathbb{C}'$ et différent de zéro, cela implique qu'ils sont inversibles et que

$$\left[(w\overline{w})(\widehat{w\overline{w}})\right]^{-1} = (w\overline{w})^{-1}(\widehat{w\overline{w}})^{-1}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} I &= w \cdot (\overline{w})(\widehat{w\overline{w}})(w\overline{w})^{-1}(\widehat{w\overline{w}})^{-1} \\ &= w \cdot \overline{w} \cdot (w\overline{w})^{-1} \\ &= (w\overline{w})(w\overline{w})^{-1} = 1. \end{aligned}$$

$\square$

D'un autre côté, $w\widehat{w} = (a^2 - c^2 + b^2 - d^2, 0, 2ac + 2bd, 0) \in \mathbb{C}$. Alors, on obtient que $(w\widehat{w})(\overline{w\widehat{w}}) \in \mathbb{R}$. Ainsi, il semble aussi légitime de poser

$$w^{-1} = \frac{\widehat{w}(\overline{w\widehat{w}})}{(w\widehat{w})(\overline{w\widehat{w}})}$$

lorsque $(w\widehat{w})(\overline{w\widehat{w}}) \neq 0$.

Proposition 2.5. Si $(w\widehat{w})(\overline{w\widehat{w}}) \neq 0$, alors w est inversible et

$$w^{-1} = \frac{\widehat{w}(\overline{w\widehat{w}})}{(w\widehat{w})(\overline{w\widehat{w}})}.$$

Démonstration.
On a que

$$I = w \cdot \left[\frac{\widehat{w}(\overline{w\widehat{w}})}{(w\widehat{w})(\overline{w\widehat{w}})}\right] = w \cdot \left[\widehat{w}(\overline{w\widehat{w}})\right] \cdot \left[(w\widehat{w})(\overline{w\widehat{w}})\right]^{-1}.$$

De plus, $(w\widehat{w})(\overline{w\widehat{w}}) \in \mathbb{R}$, donc inversible si $(w\widehat{w})(\overline{w\widehat{w}}) \neq 0$. Comme $(w\widehat{w})(\overline{w\widehat{w}}) \neq 0$ par hypothèse, cela implique que $w\widehat{w}$ et $\overline{w\widehat{w}}$ sont différents de 0. Mais, comme $w\widehat{w}$, $\overline{w\widehat{w}} \in \mathbb{C}$ et différents de 0, cela implique qu'ils sont inversibles et que

$$\left[(w\widehat{w})(\overline{w\widehat{w}})\right]^{-1} = (w\widehat{w})^{-1}(\overline{w\widehat{w}})^{-1}.$$

Donc,

$$I = w \cdot \widehat{w}(\overline{w\widehat{w}}) \cdot (w\widehat{w})^{-1} \cdot (\overline{w\widehat{w}})^{-1} = (w\widehat{w})(w\widehat{w})^{-1} = 1.$$

$\square$

Essayons maintenant de caractériser les éléments qui n'ont pas d'inverse. On sait que l'on ne peut pas trouver d'inverse à l'aide des propositions 2.4 et 2.5 lorsque $w\overline{w} = 0$ et $w\widehat{w} = 0$. Commençons donc par chercher les conditions nécessaires et suffisantes pour que $w\overline{w} = 0$. Soit $w = z_1 + z_2\mathbf{i}$ tel que $w\overline{w} = 0$. Ceci est équivalent à ce que $z_1^2 + z_2^2 = 0$, où $z_1 = a + b\mathbf{i}'$ et $z_2 = c + d\mathbf{i}'$. Or, $z_1^2 + z_2^2 = 0$, si et seulement si, $z_1^2 = -z_2^2$, si et seulement si, $z_1 = \mathbf{i}'z_2$ ou $z_1 = -\mathbf{i}'z_2$. Ceci est aussi équivalent à ce que $a + b\mathbf{i}' = -d + c\mathbf{i}'$ ou $a + b\mathbf{i}' = d - c\mathbf{i}'$, *i.e.* $(a = -d$ et $b = c)$ ou $(a = d$ et $b = -c)$.

On a donc la propriété suivante :

Lemme 2.1. Soit $w = (a, b, c, d) \in \mathbb{T}$. Alors, $w\overline{w} = 0$, si et seulement si, $(a = d$ et $b = c)$ ou $(a = d$ et $b = -c)$.

De la même façon $w\widehat{w} = 0$, si et seulement si, $z_3^2 + z_4^2 = 0$, où $z_3 = a + c\mathbf{i}$, $z_4 = b + d\mathbf{i}$ et $w = (a, b, c, d)$. Ainsi $w\widehat{w} = 0$, si et seulement si, $z_3^2 = -z_4^2$. Ceci est équivalent à ce que $(a = d$ et $b = -c)$ ou $(a = -d$ et $b = c)$.

On obtient ainsi le lemme suivant :

Lemme 2.2. Soit $w = (a, b, c, d) \in \mathbb{T}$. Alors, $w\widehat{w} = 0$, si et seulement si, $(a = d$ et $b = -c)$ ou $(a = -d$ et $b = c)$.

Il s'ensuit,

Corollaire 2.1. Soit $w = (a, b, c, d) \in \mathbb{T}$. Alors, $w\overline{w} = 0$, si et seulement si, $w\widehat{w} = 0$.

Comme $w\overline{w} = 0$, si et seulement si, $w\widehat{w} = 0$ et que l'inverse de w, s'il existe, est unique, alors si $w\overline{w} \neq 0$ ou $w\widehat{w} \neq 0$, on obtient que

$$w^{-1} = \frac{\overline{w}(\widehat{w\overline{w}})}{(w\overline{w})(\widehat{w\overline{w}})} = \frac{\widehat{w}(\overline{w\widehat{w}})}{(w\widehat{w})(\overline{w\widehat{w}})} = w^{-1}.$$

Les tétranombres $w = (a, b, c, d)$, qui sont de la forme

a) $a = d$ et $c = -b$ ou

b) $a = -d$ et $c = b$

sont donc très importants. On sait que si w n'est pas de la forme 1) ou 2), alors w^{-1} existe. Il reste à montrer que si w est de la forme 1) ou 2), alors w^{-1} n'existe pas.

Ceci est un intéressant problème à résoudre, car il revient à vouloir caractériser les tétranombres qui ne sont pas inversibles. IL ne faut oublier qu'il pourrait exister d'autres façons d'obtenir des inverses autrement que par les propositions 2.4 et 2.5.

Essayons donc de caractériser les tétranombres qui n'ont pas d'inverse ! Pour cela, on se doit d'introduire une notation matricielle aux tétranombres.

Nous savons déjà que

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \;:\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

est isomorphe aux nombres complexes habituels. Dans ce cas, pour avoir les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un nombre complexe $a + b\mathbf{i}$ ne soit pas inversible, il suffit d'obtenir les conditions nécessaires et suffisantes pour que la matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ne soit pas inversible. Ceci revient à trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que $Det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = 0$.

Ici, le déterminant est donné par

$$Det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2.$$

Donc,

$$Det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = 0 \iff a = 0 \text{ et } b = 0.$$

Pour les tétranombres, existe-t-il une telle matrice ?

Intuitivement, on pourrait considérer une matrice de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a + b\mathbf{i} & -(c + d\mathbf{i}) \\ c + d\mathbf{i} & a + b\mathbf{i} \end{pmatrix}.$$

Comme chaque nombre complexe peut lui aussi être substitué à une matrice, cela donne intuitivement la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} a & -b & -c & d \\ b & a & -d & -c \\ c & -d & a & -b \\ d & c & b & a \end{pmatrix}.$$

Mais ceci est intuitif, il nous faut donc démontrer l'isomorphie entre les tétranombres et les matrices de ce type.

Clarifions les choses. Considérons

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b & -c & d \\ b & a & -d & -c \\ c & -d & a & -b \\ d & c & b & a \end{pmatrix} \;:\; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\},$$

alors $\mathcal{M} = (\mathcal{H}, \oplus, \circledast)$ est un anneau (sous-anneau des matrices) où :

$\oplus$ est l'addition usuelle des matrices ;

$\circledast$ est la multiplication habituelle des matrices.

Considérons aussi $\mathbb{R}^4 = \{(a,b,c,d) \,:\, a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$, alors $\mathbb{T} = (\mathbb{R}^4, \cdot, +)$ est un anneau (ce sont les tétranombres) où :

$+$ est l'addition habituelle des vecteurs ;

$\cdot$ est la multiplication des tétranombres.

Proposition 2.6. On a un isomorphisme d'anneau entre $\mathcal{M} = (\mathcal{H}, \oplus, \circledast)$ et $\mathbb{T} = (\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ par

$$\begin{aligned} \varphi \,:\, \mathcal{H} &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ A &\longrightarrow \varphi(A) \end{aligned}$$

où

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & -b & -c & d \\ b & a & -d & -c \\ c & -d & a & -b \\ d & c & b & a \end{pmatrix}\right) = (a,b,c,d).$$

Démonstration.
Pour avoir un isomorphisme d'anneau, il faut que $\forall A, B \in \mathcal{H}$,

a) $\varphi(A \oplus B) = \varphi(A) \cdot \varphi(B)$;

b) $\varphi(A \circledast B) = \varphi(A) \cdot \varphi(B)$ et ;

c) φ doit être une bijection.

(c) Montrons, d'abord, que φ est injective. On veut que $\varphi(A) = \varphi(B)$ implique que $A = B$. Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & -b & -c & d \\ b & a & -d & -c \\ c & -d & a & -b \\ d & c & b & a \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} e & -f & -g & h \\ f & e & -h & -g \\ g & -h & e & -f \\ h & g & f & e \end{pmatrix}.$$

Alors, $\varphi(A) = \varphi(B)$ implique $(a,b,c,d) = (e,f,g,h)$, *i.e.* $a = e$, $b = f$, $c = g$ et $d = h$. Donc, $A = B$.

Nous montrons désormais la surjection. On veut que $\forall W \in \mathbb{R}^4$, il existe une $A \in \mathcal{H}$ telle que $\varphi(A) = W$. Soit $W = (a, b, c, d)$ et

$$A = \begin{pmatrix} a & -b & -c & d \\ b & a & -d & -c \\ c & -d & a & -b \\ d & c & b & a \end{pmatrix}.$$

Alors $\varphi(A) = W$. Donc, φ est bijective.

(a) On veut montrer que $\varphi(A \oplus B) = \varphi(A) + \varphi(B)$. Or,

$$\begin{aligned}\varphi(A \oplus B) &= \varphi\left(\begin{pmatrix} a+e & -b-f & -c-g & d+h \\ b+f & a+e & -d-h & -c-g \\ c+g & -d-h & a+e & -b-f \\ d+h & c+g & b+f & a+f \end{pmatrix}\right) \\ &= (a+e, b+f, c+g, d+h) \\ &= (a, b, c, d) + (e, f, g, h) \\ &= \varphi(A) + \varphi(B).\end{aligned}$$

(b) On veut montrer que $\varphi(A \circledast B) = \varphi(A) \cdot \varphi(B)$. Or,

$$\begin{aligned}&\varphi(A \circledast B) \\ &= \begin{pmatrix} ae-bf-cg+dh & -af-be+ch+dg & -ag+bh-ce+df & ah+bg+cf+de \\ af+be-ch-dg & ae-bf-cg+dh & -ah-bg-cf-de & -ag+bh-ce+df \\ ag-bh+ce-df & -ah-bg-cf-de & ae-bf-cg+dh & -af-be+ch+dg \\ ah+bg+cf+de & ag-bh+ce-df & af+be-ch-dg & ae-bf-cg+dh \end{pmatrix} \\ &= (ae-bf-cg+dh, af+be-ch-dg, ag-bh+ce-df, ah+bg+cf+de) \\ &= (a, b, c, d) \cdot (e, f, g, h) \\ &= \varphi(A) \cdot \varphi(B).\end{aligned}$$

$\square$

On a donc un isomorphisme d'anneau entre $\mathcal{M}$ et $\mathbb{T}$. La conséquence principale de cette isomorphie est que $w \in \mathbb{T}$ est inversible, si et seulement si, $\varphi^{-1}(w)$ est inversible.

Mais le déterminant d'une matrice de l'anneau $\mathcal{M}$ est très long à calculer, ainsi il nous faudra considérer un autre isomorphisme. Le voici :

$$T \simeq \left\{ \begin{pmatrix} a+b\mathbf{i}' & -(c+d\mathbf{i}') \\ c+d\mathbf{i}' & a+b\mathbf{i}' \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\} \text{ où } \psi\left(\begin{pmatrix} a+b\mathbf{i}' & -(c+d\mathbf{i}') \\ c+d\mathbf{i}' & a+b\mathbf{i}' \end{pmatrix}\right) = (a+b\mathbf{i}') + (c+d\mathbf{i}')\mathbf{i}.$$

Cet isomorphisme est facile à démontrer. De plus, il est conforme à l'intruition de départ et plus facile pour le calcul du déterminant. L'autre isomorphisme a été démontré en vue d'un usage ultérieur.

Remarque 3. L'usage du $\mathbf{i}$ ou $\mathbf{i}'$ dans la matrice est parfaitement équivalent. ▲

Lemme 2.3. Soit

$$A = \begin{pmatrix} a + b\mathbf{i}' & -(c + d\mathbf{i}') \\ c + d\mathbf{i}' & a + b\mathbf{i}' \end{pmatrix}.$$

Alors, $Det(A) = 0$, si et seulement si, $(a = -d$ et $b = c)$ ou $(a = d$ et $b = -c)$.

Démonstration.
$Det(A) = 0$, si et seulement si,

$$\begin{vmatrix} a + b\mathbf{i}' & -(c + d\mathbf{i}') \\ c + d\mathbf{i}' & a + b\mathbf{i}' \end{vmatrix} = 0$$

i.e. $(a + b\mathbf{i}')^2 + (c + d\mathbf{i}')^2 = 0$. Or, $w\overline{w} = 0 \iff (a = d$ et $b = c)$ ou $(a = d$ et $b = -c)$, par le lemme 2.1. □

Donc, $\psi(A) = (a, b, c, d)$ n'est pas inversible, si et seulement si, $(a = d$ et $b = c)$ ou $(a = d$ et $b = -c)$. On a donc le théorème suivant :

Théorème 2.1. Soit $w = (a, b, c, d) \in \mathbb{T}$. Alors w n'a pas d'inverse multiplicatif, si et seulement si, $(a = d$ et $b = c)$ ou $(a = d$ et $b = -c)$, *i.e.* w est de la forme $(u, v, -v, u)$ ou $(u, v, v, -u)$ avec $u, v \in \mathbb{R}$.

Corollaire 2.2. Soit $w = (a, b, c, d) \in \mathbb{T}$. Alors w est inversible, si et seulement si, $w\overline{w} \neq 0$, *i.e.*, si et seulement si, $(a + b\mathbf{i}')^2 + (c + d\mathbf{i}')^2 \neq 0$.

Corollaire 2.3. soit $w = (a, b, c, d) \in \mathbb{T}$. Alors w est inversible, si et seulement si, $w\overset{\frown}{w} \neq 0$, *i.e.*, si et seulement si, $(a + c\mathbf{i})^2 + (b + d\mathbf{i})^2 \neq 0$.

Rappelons-nous que lorsque w^{-1} existe, il peut s'écrire explicitement de la manière suivante :

$$w^{-1} = \frac{\overline{w}(w\overset{\frown}{w})}{(w\overline{w})(\overset{\frown}{w\overline{w}})} = \frac{\overset{\frown}{w}(\overline{w\overset{\frown}{w}})}{(w\overset{\frown}{w})(\overline{w\overset{\frown}{w}})}. \tag{2.1}$$

Cette façon d'écrire a évidemment pour but d'avoir un *dénominateur réel*, mais si l'on se content d'un *dénominateur complexe ou complexe prime*, alors on peut écrire :

$$w^{-1} = \frac{\overline{w}}{w\overline{w}} = \frac{\overparen{w}}{w\overparen{w}}.$$

La preuve se veut la même que pour 2.1, mais en plus simple.

Chapitre

3 L'équation du second degré

Ce chapitre est voué à l'exploration des solutions possibles de l'équation du second degré à coefficients réels. Nous essayerons ainsi d'étendre les solutions à l'ensemble des tétranombres.

Notre but est de trouver les racines d'une équation du second degré. Soit $w = (x, y, z, q) \in \mathbb{T}$. Soit l'équation du second degré $aw^2 + bw + c = 0$ avec a, b et $c \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} aw^2 + bw + c &= a(x, y, z, q)^2 + b(x, y, z, q) + c \\ &= a(x^2 - y^2 + q^2 - z^2, 2xy - 2zq, 2xz - 2yq, 2xq + 2yz) + b(x, y, z, q) + c(1, 0, 0, 0) \\ &= (ax^2 - ay^2 + aq^2 - az^2 + bx + c, 2axy - 2azq + by, 2axz - 2ayq + bz, \\ &\qquad 2axq + 2ayz + bq). \end{aligned}$$

Cherchons les conditions sur x, y, z, q pour que $aw^2 + bw + c = 0$. Il y a quatre équations :

$$\begin{aligned} U &= ax^2 - ay^2 + aq^2 - az^2 + bx + c, \\ V &= 2axy - 2azq + by, \\ K &= 2axz - 2ayq + bz \\ \text{et } L &= 2axq + 2ayz + bq. \end{aligned}$$

On veut que U, V, K et L soient égaux à 0 en même temps, avec $a \neq 0$.

Supposons donc que U, V, K et $L = 0$ et cherchons la forme que doit avoir $w = (x, y, z, q)$ pour satisfaire à ce système d'équations.

Si $q = 0$, alors $L = 2ayz = 0$. Donc $yz = 0$, ce qui implique que

$$(1)\ y = 0 \text{ ou } (2)\ z = 0.$$

Dans le cas où $y = 0$ (1), on obtient que $K = 2axz_bz = 0$. Ceci est équivalent à ce que $z(2ax + b) = 0$, donc $z = 0$ ou $2ax + b = 0$. Or, dans le cas où $z = 0$, on obtient que $U =$

$ax^2 + bx + c = 0$. Ainsi,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ si } b^2 - 4ac \geq 0.$$

D'un autre côté, $2ax + b = 0$ implique que $x = \frac{-b}{2a}$. Dans ce cas,

$$U = a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) - az^2 - \frac{b^2}{2a} + c = 0,$$

i.e.

$$-az^2 = \frac{-b^2}{4a} + \frac{b^2}{2a} - c = \frac{-b^2}{4a} + \frac{b^2}{2a} - \frac{4ac}{4a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Donc

$$z^2 = \frac{4ac - b^2}{4a^2}, \text{ donc } z = \pm\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

si $b^2 - 4ac \leq 0$.

Dans le cas où $z = 0$ (2), alors $V = 2axy + by = 0$. Donc, $y(2ax + b) = 0$, *i.e.* $y = 0$ ou $2ax + b = 0$. Lorsque $y = 0$, on obtient que $U = ax^2 + bx + c = 0$, *i.e.*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ si } b^2 - 4ac \geq 0.$$

D'un autre côté, lorsque $x = \frac{-b}{2a}$, ceci implique que $U = \frac{ab^2}{4a^2} - ay^2 - \frac{b^2}{2a} + c = 0$. Alors

$$-ay^2 = \frac{-b^2}{4a} + \frac{b^2}{2a} - c = \frac{-b^2}{4a} + \frac{2b^2}{4a} - \frac{4ac}{4a}$$

et ainsi

$$y = \frac{\pm\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \text{ si } b^2 - 4ac \leq 0.$$

Bref, si $q = 0$, on a

a) $y = 0$ avec $z = 0$ et $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ si $b^2 - 4ac \geq 0$;

b) $y = 0$ avec $x = \frac{-b}{2a}$ et $z = \frac{\pm\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$ si $b^2 - 4ac \leq 0$;

c) $z = 0$ avec $x = \frac{-b}{2a}$ et $y = \frac{\pm\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$ si $b^2 - 4ac \geq 0$.

Si $q \neq 0$, alors $L = 2axq + 2ayz + bq = 0$. Ceci implique que $x = \frac{-yz}{q} - \frac{b}{2a}$. Donc,

$$K = \frac{-2azyz}{q} - \frac{2azb}{2a} - 2ayq + bz = \frac{-2ayz^2}{q} - 2ayq + bz = 0.$$

On obtient ainsi que $yz^2 + yq^2 = 0$, *i.e.* $y = 0$. Cette dernière information nous indique que $x = \frac{-b}{2a}$ et que $V = -2azq = 0$, *i.e.* $z = 0$. Ainsi,

$$U = a\frac{b^2}{4a^2} + aq^2 - \frac{b^2}{2a} + c = 0,$$

ce qui implique que

$$\frac{b^2}{4a} + aq^2 - \frac{b^2}{2a} + c = 0.$$

Donc,

$$aq^2 = \frac{-b^2}{4a} + \frac{2b^2}{4a} - \frac{4ac}{4a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

i.e.

$$q = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ si } b^2 - 4ac \geq 0.$$

Donc, si $q \neq 0$, on a

d) $y = 0$ avec $z = 0$, $q = \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ si $b^2 - 4ac \geq 0$ et $x = \frac{-b}{2a}$.

En résumé : Voici les formes possibles de w lorsque $aw^2 + bw + c = 0$,

(a) $b^2 - 4ac \geq 0$ avec $w = \left(\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, 0, 0, 0\right)$;

(b) $b^2 - 4ac \leq 0$ avec $w \left(\frac{-b}{2a}, 0, \frac{\pm\sqrt{4ac-b^2}}{2a}, 0\right)$;

(c) $b^2 - 4ac \leq 0$ avec $w = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{\pm\sqrt{4ac-b^2}}{2a}, 0, 0\right)$;

(d) $b^2 - 4ac \geq 0$ avec $w = \left(\frac{-b}{2a}, 0, 0, \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$.

On peut ainsi énoncé le théorème suivant.

Théorème 3.1. Soit $w = (x, y, z, q) \in \mathbb{T}$. Alors w est solution de l'équation $ah^2 + bh + c = 0$ avec $h \in \mathbb{T}$ et $a, b, c \in \mathbb{R}$ $(a \neq 0)$, si et seulement si, w est de la forme (a), (b), (c) ou (d) du résumé précédent.

Démonstration.
Par ce qui a été fait auparavant, il nous reste seulement à vérifier si les solutions du résulmé sont de bonnes solutions. Or, on peut vérifier facilement que celles-ci sont de bonnes solutions. □

Corollaire 3.1. Les solutions de l'équation $ah^2 + bh + c = 0$ avec $h \in \mathbb{T}$ et $a, b, c \in \mathbb{R}$ sont les suivantes

1) si $\Delta > 0$, $\left(\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}, 0, 0, 0\right)$ et $\left(\frac{-b}{2a}, 0, 0, \frac{\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$;

2) si $\Delta < 0$, $\left(\frac{-b}{2a}, 0, \frac{\pm\sqrt{-\Delta}}{2a}, 0\right) \in \mathbb{C}$ et $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{\pm\sqrt{\Delta}}{2a}, 0, 0\right) \in \mathbb{C}'$;

3) si $\Delta = 0$, $\left(\frac{-b}{2a}, 0, 0, 0\right)$;

où $\Delta := b^2 - 4ac$ et "$\pm$" doit être pris dans le sens "+ et -".

Démonstration.
Direct du théorème précédent. □

Chapitre

4 Fonctions trigonométriques

Ce chapitre est voué à l'exploration des propriétés de diverses fonctions trigonométriques pour les tétranombres.

La première étape sera de trouver une fonction exponentielle pour les tétranombres. On a déjà pour les nombres complexes, l'exponentielle suivant : $e^z = e^{x+\mathbf{i}y} = e^x(\cos y + \mathbf{i}\sin y)$.

Intuitivement, il serait naturel de prendre une définition utilisant un x et un y éléments des nombres complexes. Ceci nous amène à la forme intuitive suivante :

$$e^w = w^{(x,y,z,q)} = e^{x+\mathbf{i}y}\left(\cos(z+\mathbf{i}q) + \sin(z+\mathbf{i}q)\right) = e^{x+\mathbf{i}y}\cos(z+\mathbf{i}q) + \mathbf{i}e^{x+\mathbf{i}y}\sin(z+\mathbf{i}q).$$

Évidemment, on veut que l'exponentielle soit à valeur dans les tétranombres, ce qui nous amène à poser la définition formelle suivante :

Définition 4.1. Soit $w = (x, y, zq) \in \mathbb{T}$. Alors

$$\begin{aligned} e^w = \Big(&\Re\mathrm{e}\left[e^{x+\mathbf{i}y}\cos(z+\mathbf{i}q)\right], \Im\mathrm{m}\left[e^{x+\mathbf{i}y}\cos(z+\mathbf{i}q)\right], \\ &\Re\mathrm{e}\left[e^{x+\mathbf{i}y}\sin(z+\mathbf{i}q)\right], \Im\mathrm{m}\left[e^{x+\mathbf{i}y}\sin(z+\mathbf{i}q)\right]\Big). \end{aligned}$$

Pour être certain de la légitimité de cette définition, il faut au moins montrer que l'exponentielle complexe est conservée.

Propriété 4.1. Soit $w = (x, 0, y, 0) \in \mathbb{C}$. Alors

$$e^w = (e^x\cos(y), 0, e^x\sin y, 0) \text{ i.e. } e^x(\cos y + \mathbf{i}\sin y).$$

Démonstration.
On a que

$$\begin{aligned} e^w = e^{(x,0,y,0)} &= (\Re\mathrm{e}\,[e^x \cos y]\,, \Im\mathrm{m}\,[e^x \cos y]\,, \Re\mathrm{e}\,[e^x \sin y]\,, \Im\mathrm{m}\,[e^x \sin y]) \\ &= (e^x \cos y, 0, e^x \sin y, 0)\,. \end{aligned}$$

□

Propriété 4.2. Soit $w = (x, y, 0, 0) \in \mathbb{C}'$. Alors

$$e^w = (e^x \cos y, e^x \sin y, 0, 0)$$

i.e. $e^w = e^x(\cos y + \mathbf{i}' \sin y)$.

Démonstration.
On a que

$$\begin{aligned} e^w = e^{(x,y,0,0)} &= \left(\Re\mathrm{e}\left[e^{x+\mathbf{i}y}\cos(0)\right], \Im\mathrm{m}\left[e^{x+\mathbf{i}y}\cos 0\right], \Re\mathrm{e}\left[e^{x+\mathbf{i}y}\sin 0\right], \Im\mathrm{m}\left[e^{x+\mathbf{i}y}\sin 0\right]\right) \\ &= \left(\Re\mathrm{e}\left[e^{x+\mathbf{i}y}\right], \Im\mathrm{m}\left[e^{x+\mathbf{i}y}\right], 0, 0\right) \\ &= (e^x \cos y, e^x \sin y, 0, 0)\,. \end{aligned}$$

□

Il est maintenant plus facile de généraliser le sinus et le cosinus en ayant déjà l'exponentielle de définie.

Définition 4.2. Soit $w = (x, y, z, q) \in \mathbb{T}$. Alors

$$\cos(w) := \frac{e^{\mathbf{i}w} + e^{-\mathbf{i}w}}{2}, \ \sin(w) := \frac{e^{\mathbf{i}w} - e^{-\mathbf{i}w}}{2\mathbf{i}} \text{ et } \mathrm{tg}(w) := \frac{\sin(w)}{\cos(w)} = \frac{e^{\mathbf{i}w} - e^{-\mathbf{i}w}}{\mathbf{i}(e^{\mathbf{i}w} + e^{-\mathbf{i}w})}.$$

Remarque 4. On peut démontrer facilement que : $\cos(a+b\mathbf{i})$, $\sin(a+b\mathbf{i})$, $\cos(a+b\mathbf{i}')$ et $\sin(a+b\mathbf{i}')$ restent consistants avec la définition 4.2. ▲

Il est évidemment ardu de travailler avec la définition actuelle de l'exponentielle. Il serait intéressant d'en avoir une définition plus explicite.

Rappel : Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on a les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b),\\
\sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b),\\
\mathrm{ch}(a+b) &= \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b),\\
\sin(a+b) &= \mathrm{ch}(a)\mathrm{sh}(b) + \mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b),\\
\cos(a+b\mathbf{i}) &= \cos(a)\mathrm{ch}(b) - \mathbf{i}\sin(a)\mathrm{sh}(b)\\
\text{et } \sin(a+b\mathbf{i}) &= \sin(a)\mathrm{ch}(b) + \mathbf{i}\cos(a)\mathrm{sh}(b).
\end{aligned}$$

Proposition 4.3. Soit $w = (a, b, c, d) \in \mathbb{T}$. alors

$$e^w = e^a\left(\cos(b)\cos(c)\mathrm{ch}(d) + \sin(b)\sin(c)\mathrm{sh}(d), -\cos(b)\sin(c)\mathrm{sh}(d) + \sin(b)\cos(c)\mathrm{ch}(d),\right.$$
$$\left.\cos(b)\sin(c)\mathrm{ch}(d) - \sin(b)\cos(c)\mathrm{sh}(d), \cos(b)\cos(c)\mathrm{sh}(d) + \sin(b)\sin(c)\mathrm{ch}(d)\right).$$

Démonstration.

Soit $w = (a, b, c, d) \in \mathbb{T}$. On a

$$\begin{aligned}
e^w &= e^{(a,b,c,d)}\\
&= \left(\Re\mathrm{e}\left[e^{a+\mathbf{i}b}\cos(c+d\mathbf{i})\right], \Im\mathrm{m}\left[e^{a+b\mathbf{i}}\cos(c+d\mathbf{i})\right], \Re\mathrm{e}\left[e^{a+b\mathbf{i}}\sin(c+d\mathbf{i})\right], \Im\mathrm{m}\left[e^{a+b\mathbf{i}}\sin(c+d\mathbf{i})\right]\right).
\end{aligned}$$

Posons $U = e^{a+b\mathbf{i}}\cos(c+d\mathbf{i})$ et $V = e^{a+b\mathbf{i}}\sin(c+d\mathbf{i})$. On a donc :

$$\begin{aligned}
U &= e^a(\cos(b) + \mathbf{i}\sin(b))\left[\cos(c)\mathrm{ch}(d) - \mathbf{i}\sin(c)\mathrm{sh}(d)\right] \text{ et}\\
V &= e^a(\cos(b) + \mathbf{i}\sin(b))\left[\sin(c)\mathrm{ch}(d) + \mathbf{i}\cos(c)\mathrm{sh}(d)\right].
\end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$U = e^a\left(\cos(b)\cos(c)\mathrm{ch}(d) - \mathbf{i}\cos(b)\sin(c)\mathrm{sh}(d) + \mathbf{i}\sin(b)\cos(c)\mathrm{ch}(d) + \sin(b)\sin(c)\mathrm{sh}(d)\right)$$

et

$$V = e^a\left(\cos(b)\sin(c)\mathrm{ch}(d) + \mathbf{i}\cos(b)\cos(c)\mathrm{sh}(d) + \mathbf{i}\sin(b)\sin(c)\mathrm{ch}(d) - \sin(b)\cos(c)\mathrm{sh}(d)\right).$$

Or,

$$\begin{aligned}
\Re\mathrm{e}(U) &= e^a\left(\cos(b)\cos(c)\mathrm{ch}(d) + \sin(b)\sin(c)\mathrm{sh}(d)\right),\\
\Im\mathrm{m}(U) &= e^a\left(\sin(b)\cos(c)\mathrm{ch}(d) - \cos(b)\sin(c)\mathrm{sh}(d)\right),\\
\Re\mathrm{e}(V) &= e^a\left(\cos(b)\sin(c)\mathrm{ch}(d) - \sin(b)\cos(c)\mathrm{sh}(d)\right) \text{ et}\\
\Im\mathrm{m}(V) &= e^a\left(\cos(b)\cos(c)\mathrm{sh}(d) + \sin(b)\sin(c)\mathrm{ch}(d)\right).
\end{aligned}$$

Mais, comme $e^w = (\Re\mathrm{e}\,(U), \Im\mathrm{m}\,(U), \Re\mathrm{e}\,(V), \Im\mathrm{m}\,(V))$, on a donc que :

$$\begin{aligned} e^w = e^a\,&(\cos(b)\cos(c)\mathrm{ch}(d) + \sin(b)\sin(c)\mathrm{sh}(d), \sin(b)\cos(c)\mathrm{ch}(d) - \cos(b)\sin(c)\mathrm{sh}(d), \\ &\cos(b)\sin(c)\mathrm{ch}(d) - \sin(b)\cos(c)\mathrm{sh}(d), \cos(b)\cos(c)\mathrm{sh}(d) + \sin(b)\sin(c)\mathrm{ch}(d)) \,. \end{aligned}$$

□

À partir de la définition établie de l'exponentielle généralisée, il est possible de démontrer la propriété fondamentale suivante : $e^{\alpha+\beta} = e^\alpha e^\beta$.

Cependant, la preuve nécessaire pour établir cette propriété est longue et fastidieuse. Il est toutefois possible de faire cette même preuve d'une façon beaucoup plus rapide. Pour cela, il sera utile d'utiliser la notation qui représente les tétranombres comme complexification des nombres complexes.

Voici, donc, une définition plus intuitive de l'exponentielle.

Définition 4.3. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{T}$. Alors,

$$e^{(a,b,c,d)} = e^{(a+b\mathbf{i}')+(c+d\mathbf{i}')\mathbf{i}} = e^{a+b\mathbf{i}'}\,(\cos(c + d\mathbf{i}') + \mathbf{i}\sin(c + d\mathbf{i}')) \,.$$

En identifiant (a, b, c, d) "=" $z_1 + z_2\mathbf{i}$, on peut écrire $e^{z_1+z_2\mathbf{i}} = e^{z_1}\,(\cos(z_2) + \mathbf{i}\sin(z_2))$.

Cette définition semble beaucoup plus naturelle que la précédente. Bien sûr, pour rester consistant, il nous faut montrer que les deux définitions sont équivalentes.

Proposition 4.4. La définition 4.1 est équivalente à la définition 4.3. Autrement dit,

$$e^{a+b\mathbf{i}'}\,(\cos(c + d\mathbf{i}') + \mathbf{i}\sin(c + d\mathbf{i}'))$$

est égale à

$$\begin{aligned} e^a\,&(\cos(b)\cos(c)\mathrm{ch}(d) + \sin(b)\sin(c)\mathrm{sh}(d), -\cos(b)\sin(c)\mathrm{sh}(d) + \sin(b)\cos(c)\mathrm{ch}(d), \\ &\cos(b)\sin(c)\mathrm{ch}(d) - \sin(b)\cos(c)\mathrm{sh}(d), \cos(b)\cos(c)\mathrm{sh}(d) + \sin(b)\sin(c)\mathrm{ch}(d)) \end{aligned}$$

$\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{T}$.

Démonstration.
On a que $e^{a+b\mathbf{i}'}\,[\cos(c + d\mathbf{i}') + \mathbf{i}\sin(c + d\mathbf{i}')]$

$$= e^a\,(\cos(b) + \mathbf{i}'\sin(b))\,(\cos(c)\mathrm{ch}(d) - \mathbf{i}'\sin(c)\mathrm{sh}(d) + \mathbf{i}(\sin(c)\mathrm{ch}(d) + \mathbf{i}'\cos(c)\mathrm{sh}(d)))$$
$$= e^a\,(\cos(b)\cos(c)\mathrm{ch}(d) - \mathbf{i}'\cos(b)\sin(c)\mathrm{sh}(d) + \mathbf{i}'\sin(b)\cos(c)\mathrm{ch}(d) + \sin(b)\sin(c)\mathrm{sh}(d)$$

$$
\begin{aligned}
&+\mathbf{i}(\cos(b)\sin(c)\mathrm{ch}(d)+\mathbf{i}'\cos(b)\cos(c)\mathrm{sh}(d)+\mathbf{i}'\sin(b)\sin(c)\mathrm{ch}(d)-\sin(b)\cos(c)\mathrm{sh}(d)))\\
&=e^a\left[\cos(b)\cos(c)\mathrm{ch}(d)+\sin(b)\sin(c)\mathrm{sh}(d)+(\sin(b)\cos(c)\mathrm{ch}(d)-\cos(b)\sin(c)\mathrm{sh}(d))\mathbf{i}'\right.\\
&\left.+(\cos(b)\sin(c)\mathrm{ch}(d)-\sin(b)\cos(c)\mathrm{sh}(d))\mathbf{i}+(\cos(b)\cos(c)\mathrm{sh}(d)+\sin(b)\sin(c)\mathrm{ch}(d))\mathbf{j}\right]\\
&=e^a\left[\cos(b)\cos(c)\mathrm{ch}(d)+\sin(b)\sin(c)\mathrm{sh}(d),\sin(b)\cos(c)\mathrm{ch}(d)-\cos(b)\sin(c)\mathrm{sh}(d),\right.\\
&\left.\cos(b)\sin(c)\mathrm{ch}(d)-\sin(b)\cos(c)\mathrm{sh}(d),\cos(b)\cos(c)\mathrm{sh}(d)+\sin(b)\sin(c)\mathrm{ch}(d)\right].
\end{aligned}
$$

□

L'avantage de cette nouvelle définition, c'est de pourvoir démontrer le prochain théorème de façon beaucoup plus conceptuelle qu'avec la première définition.
Rappel : Pour z_1 et $z_2 \in \mathbb{C}$ ou $\mathbb{C}'$, on a que

$$
\begin{aligned}
\cos(z_1+z_2)&=\cos(z_1)\cos(z_2)-\sin(z_1)\sin(z_2)\\
\text{et }\ \sin(z_1+z_2)&=\cos(z_1)\sin(z_2)+\sin(z_1)\cos(z_2).
\end{aligned}
$$

Théorème 4.1. $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{T}$, nous avons que $e^{\alpha+\beta}=e^{\alpha}e^{\beta}$.

Démonstration.
Soit $\alpha=(a,b,c,d)$ et $\beta=(e,f,g,h)$. Alors

$$
\begin{aligned}
e^{\alpha}e^{\beta}&=e^{(a+b\mathbf{i}')+(c+d\mathbf{i}')\mathbf{i}}e^{(e+f\mathbf{i}')+(g+h\mathbf{i}')\mathbf{i}}\\
&=e^{a+b\mathbf{i}'}\left(\cos(c+d\mathbf{i}')+\mathbf{i}\sin(c+d\mathbf{i}')\right)e^{e+f\mathbf{i}'}\left(\cos(g+f\mathbf{i}')+\mathbf{i}\sin(g+h\mathbf{i}')\right)\\
&=e^{(a+e)+(b+f)\mathbf{i}'}\left[\cos(c+d\mathbf{i}')\cos(g+h\mathbf{i}')+\mathbf{i}\cos(c+d\mathbf{i}')\sin(g+h\mathbf{i}')+\mathbf{i}\sin(c+d\mathbf{i}')\cos(c+d\mathbf{i}')\right.\\
&\quad\left.-\sin(c+d\mathbf{i}')\sin(g+h\mathbf{i}')\right]\\
&=e^{(a+e)+(b+f)\mathbf{i}'}\left[\cos(c+d\mathbf{i}')\cos(g+h\mathbf{i}')-\sin(c+d\mathbf{i}')\sin(g+h\mathbf{i}')+\mathbf{i}\sin(c+d\mathbf{i}')\cos(g+h\mathbf{i}')\right.\\
&\quad\left.+\cos(c+d\mathbf{i}')\sin(c+d\mathbf{i}')\right].
\end{aligned}
$$

□

L'avantage de cette nouvelle définition, c'est de pouvoir démontrer le prochain théorème de façon beaucoup plus conceptuelle qu'avec la première définition.

Rappel : Pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ou $\mathbb{C}'$, on a que

$$\cos(z_1+z_2)=\cos(z_1)\cos(z_2)-\sin(z_1)\sin(z_2)$$

et

$$\sin(z_1+z_2)=\sin(z_1)\cos(z_2)+\cos(z_1)\cos(z_2).$$

Théorème 4.2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{T}$, nous avons que $e^{\alpha+\beta} = e^{\alpha}e^{\beta}$.

Démonstration.
Soit $\alpha = (a,b,c,d)$ et $\beta = (e,f,g,h)$. Alors

$$\begin{aligned}
e^{\alpha}e^{\beta} &= e^{(a+b\mathbf{i}')+(c+d\mathbf{i}')\mathbf{i}}e^{(e+f\mathbf{i}')+(g+h\mathbf{i}')\mathbf{i}} \\
&= e^{a+b\mathbf{i}'}\left[\cos(c+d\mathbf{i}')+\mathbf{i}\sin(c+d\mathbf{i}')\right]e^{e+f\mathbf{i}'}\left[\cos(g+h\mathbf{i}')+\mathbf{i}\sin(g+h\mathbf{i}')\right] \\
&= e^{(a+e)+(b+f)\mathbf{i}'}\left[\cos(c+d\mathbf{i}')\cos(g+h\mathbf{i}')+\mathbf{i}\cos(c+d\mathbf{i}')\sin(g+h\mathbf{i}')+\mathbf{i}\sin(c+d\mathbf{i}')\cos(g+h\mathbf{i}')\right. \\
&\quad \left.-\sin(c+d\mathbf{i}')\sin(g+h\mathbf{i}')\right] \\
&= e^{(a+e)+(b+f)\mathbf{i}'}\left[\cos(c+d\mathbf{i}')\cos(g+h\mathbf{i}')-\sin(c+d\mathbf{i}')\sin(g+h\mathbf{i}')+\mathbf{i}\left(\sin(c+d\mathbf{i}')\cos(g+h\mathbf{i}')\right.\right. \\
&\quad \left.\left.+\cos(c+d\mathbf{i}')\sin(g+h\mathbf{i}')\right)\right].
\end{aligned}$$

Or, on a aussi que

$$\begin{aligned}
e^{\alpha+\beta} &= e^{(a+e,b+f,c+g,d+h)} \\
&= e^{(a+e)+(b+f)\mathbf{i}'}\left[\cos\left((c+g)+(d+h)\mathbf{i}'\right)+\mathbf{i}\sin\left((c+g)+(d+h)\mathbf{i}'\right)\right] \\
&= e^{(a+e)+(b+f)\mathbf{i}'}\left[\cos\left((c+d\mathbf{i}')+(g+h\mathbf{i}')\right)+\mathbf{i}\sin\left((c+d\mathbf{i}')+(g+h\mathbf{i}')\right)\right] \\
&= e^{(a+e)+(b+f)\mathbf{i}'}\left[\cos(c+d\mathbf{i}')\cos(g+h\mathbf{i}')-\sin(c+d\mathbf{i}')\sin(g+h\mathbf{i}')+\mathbf{i}\left(\sin(c+d\mathbf{i}')\cos(g+h\mathbf{i}')\right.\right. \\
&\quad \left.\left.+\cos(c+d\mathbf{i}')\sin(g+h\mathbf{i}')\right)\right].
\end{aligned}$$

$\square$

Pour la suite de ce chapitre, nous allons explorer d'autres résultats découlant de la définition de la généralisation de l'exponentielle.

Nous savons déjà que $w^{-1} = \frac{\overline{w}}{w\overline{w}}$ lorsque l'inverse de w existe. Pour un $w = (a,b,c,d)$ inversible, ceci se traduit par :

$$w^{-1} = \frac{(a+b\mathbf{i}')+\mathbf{i}(-c-d\mathbf{i}')}{(a+b\mathbf{i}')2+(c+d\mathbf{i}')^2} = \frac{a+b\mathbf{i}'}{(a+b\mathbf{i}')^2+(c+d\mathbf{i}')^2} - \mathbf{i}\frac{c+d\mathbf{i}'}{(a+b\mathbf{i}')^2+(c+d\mathbf{i}')^2}.$$

De plus, si on pose $z_1 = a+b\mathbf{i}'$ et $z_2 = c+d\mathbf{i}'$, alors w^{-1} peut s'exprimer ainsi :

$$w^{-1} = \frac{z_1}{z_1^2+z_2^2} - \mathbf{i}\frac{z_2}{z_1^2+z_2^2}.$$

Cette forme est analogue à celle des nombres complexes.

Rappel : Si $z \in \mathbb{C}$ ou $\mathbb{C}'$, alors $\sin^2(z)+\cos^2(z) = 1$, $\sin(-z) = -\sin(z)$ et $\cos(-z) = \cos(z)$.

Théorème 4.3. Soit $w = (a,b,c,d) \in \mathbb{T}$. Alors, e^w est toujours inversible et $(e^w)^{-1} = e^{-w}$.

Démonstration.
Soit $w = (a + b\mathbf{i}') + (c + d\mathbf{i}')\mathbf{i}$, alors $e^w = e^{a+b\mathbf{i}'}\left[\cos(c + d\mathbf{i}') + \mathbf{i}\sin(c + d\mathbf{i}')\right]$. Ainsi,

$$\begin{aligned} e^{-w} &= e^{-a-b\mathbf{i}'}\left[(-c - d\mathbf{i}') + \mathbf{i}\sin(-c - d\mathbf{i}')\right] \\ &= e^{-a-b\mathbf{i}'}\left[\cos(-(c + d\mathbf{i}')) + \mathbf{i}\sin(-(c + d\mathbf{i}'))\right] \\ &= e^{-a-b\mathbf{i}'}\left[\cos(c + d\mathbf{i}') - \mathbf{i}'\sin(c + d\mathbf{i}')\right]. \end{aligned}$$

Or, $(e^w)^{-1} = \left(e^{a+b\mathbf{i}'}\left[\cos(c + d\mathbf{i}') + \mathbf{i}\sin(c + d\mathbf{i}')\right]\right)^{-1}$.

Afin de distribuer l'inverse sur $e^{a+b\mathbf{i}'}$ et $\cos(c + d\mathbf{i}') + \mathbf{i}\sin(c + d\mathbf{i}')$, nous avons déjà vu qu'il suffit de montrer que les expressions $e^{a+b\mathbf{i}'}$ et $\cos(c + d\mathbf{i}') + \mathbf{i}\sin(c + d\mathbf{i}')$ soient toutes les deux inversibles. Évidemment, $e^{a+b\mathbf{i}'}$ est trivialement inversible. Pour pouvoir montrer que $M = \cos(c + d\mathbf{i}') + \mathbf{i}\sin(c + d\mathbf{i}')$ est toujours inversible, il suffit de montrer que $M \cdot \overline{M} \neq 0$. Or, $M \cdot \overline{M} = \cos^2(c + d\mathbf{i}') + \sin^2(c + d\mathbf{i}') = 1$. De plus,

$$\begin{aligned} (e^w)^{-1} &= (e^{a+b\mathbf{i}'})^1\left[\cos(c + d\mathbf{i}') + \mathbf{i}\sin(c + d\mathbf{i}')\right]^{-1} \\ &= e^{-(a+b\mathbf{i}')}\left[\frac{\cos(c + d\mathbf{i}')}{\cos^2(c + d\mathbf{i}') + \sin^2(c + d\mathbf{i}')} - \mathbf{i}\frac{\sin(c + d\mathbf{i}')}{\cos^2(c + d\mathbf{i}') + \sin^2(c + d\mathbf{i}')}\right] \\ &= e^{-(a+b\mathbf{i}')}\left[\cos(c + d\mathbf{i}') - \mathbf{i}\sin(c + d\mathbf{i}')\right]. \end{aligned}$$

□

Proposition 4.5. Soit $w_1, w_2 \in \mathbb{T}$. Alors

$$\frac{e^{w_1}}{e^{w_2}} = e^{w_1 - w_2}$$

i.e. $e^{w_1} \cdot (e^{w_2})^{-1} = e^{w_1 - w_2}$.

Démonstration.
Premièrement, du théorème précédent, on note que e^w set toujours inversible $\forall w \in \mathbb{T}$. De plus,

$$\frac{e^{w_1}}{e^{w_2}} = e^{w_1}(e^{w_2})^{-1} = e^{w_1 + (-w_2)} = e^{w_1 - w_2}.$$

□

Proposition 4.6. Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $w \in \mathbb{T}$. Alors $e^{nw} = (e^w)^n$.

Démonstration.
Si $n = 0$, on a que $e^{0w} = e^0 = 1 = (e^w)^0$.

Si $n > 0$, on vérifie par induction sur n. Pour $n = 1$, $e^w = e^w$. Supposons le résultat vrai pour $n-1$, *i.e.* $e^{(n-1)w} = (e^w)^{n-1}$. Alors

$$e^{nw-w} = (e^w)^n (e^w)^{-1}$$

i.e. $e^{nw}e^{-w} = (e^w)^n(e^w)^{-1}$. Donc, $e^{nw} = (e^w)^n$.

Si $n < 0$, on pose $n = -p$ avec $p > 0$ et on vérifie par induction sur p que $e^{(-p)w} = (e^w)^{-p}$ $\forall p$. Pour $p = 1$, $e^{-w} = (e^w)^{-1}$. Supposons que le résultat soit vrai pour $n-1$, *i.e.* $e^{(-p+1)w} = (e^w)^{-p+1}$. Alors

$$e^{-pw+w} = (e^w)^{-p} e^w$$

i.e. $e^{-pw}e^w = (e^w)^{-p}e^w$. Donc, $e^{-pw} = (e^w)^{-p}$. $\square$

Proposition 4.7. Soit $w \in \mathbb{T}$, alors $\cos^2(w) + \sin^2(w) = 1$.

Démonstration.
On a que

$$\begin{aligned}\cos^2(w) + \sin^2(w) &= \left(\frac{e^{\mathbf{i}w} + e^{-\mathbf{i}w}}{2}\right)^2 + \left(frac e^{\mathbf{i}w} - e^{-\mathbf{i}w} 2\mathbf{i}\right)^2 \\ &= \left(\frac{e^{2\mathbf{i}w} + 2 + e^{-2\mathbf{i}w}}{4}\right) - \left(\frac{e^{2\mathbf{i}w} - 2 + e^{-2\mathbf{i}w}}{4}\right) = 1.\end{aligned}$$

$\square$

Proposition 4.8. Soit $w \in \mathbb{T}$, alors $\sin(-w) = -\sin(w)$.

Démonstration.
On a que

$$\sin(-w) = \frac{e^{\mathbf{i}(-w)} - e^{-\mathbf{i}(-w)}}{2\mathbf{i}} = \frac{e^{-\mathbf{i}w} - e^{\mathbf{i}w}}{2\mathbf{i}} = -\left(\frac{e^{\mathbf{i}w} - e^{-\mathbf{i}w}}{2\mathbf{i}}\right) = -\sin(w).$$

$\square$

Proposition 4.9. Soit $w \in \mathbb{T}$, alors $\cos(-w) = \cos(w)$.

Démonstration.
On a que

$$\cos(-w) = \frac{e^{\mathbf{i}(-w)} + e^{-\mathbf{i}(-w)}}{2} = \frac{e^{-\mathbf{i}w} + e^{\mathbf{i}w}}{2} = \frac{e^{\mathbf{i}w} + e^{-\mathbf{i}w}}{2} = \cos(w).$$

□

Proposition 4.10. Soit $w \in \mathbb{T}$, alors $\mathrm{tg}(-w) = -\mathrm{tg}(w)$.

Démonstration.
On a que $\mathrm{tg}(-w) = \frac{\sin(-w)}{\cos(w)} = \frac{-\sin(w)}{\cos(w)} = -\mathrm{tg}(w)$. □

Proposition 4.11. Soit $w \in \mathbb{T}$, alors $e^{\mathbf{i}w} = \cos(w) + \mathbf{i}\sin(w)$ et $e^{-\mathbf{i}w} = \cos(w) - \mathbf{i}\sin(w)$.

Démonstration.
On remarque que

$$e^{\mathbf{i}w} - e^{\mathbf{i}w} = 2\mathbf{i}\sin(w), \tag{1}$$
$$e^{\mathbf{i}w} + e^{-\mathbf{i}w} = 2\cos(w). \tag{2}$$

Par addition de (1) et (2), on obtient que $2e^{\mathbf{i}w} = 2\cos(w) + 2\mathbf{i}\sin(w)$ et donc $e^{\mathbf{i}} = \cos(w) + \mathbf{i}\sin(w)$. Par soustraction de (1) et (2), on obtient que $2e^{-\mathbf{i}w} = 2\cos(w) + 2\mathbf{i}\sin(w)$ et donc $e^{-\mathbf{i}w} = \cos(w) - \mathbf{i}\sin(w)$. □

Proposition 4.12. soit $w_1, w_2 \in \mathbb{T}$, alors $\sin(w_1 + w_2) = \sin(w_1)\cos(w_2) + \cos(w_1)\sin(w_2)$.

Démonstration.
On a que

$$\begin{aligned}
\sin(w_1 + w_2) &= \frac{e^{\mathbf{i}(w_1+w_2)} - e^{-\mathbf{i}(w_1+w_2}}{2\mathbf{i}} \\
&= \frac{e^{\mathbf{i}w_1}e^{\mathbf{i}w_2} - e^{-\mathbf{i}w_1}e^{-\mathbf{i}w_2}}{2\mathbf{i}} \\
&= \frac{[\cos(w_1) + \mathbf{i}\sin(w_1)]\,[\cos(w_2) + \mathbf{i}\sin(w_2)] - [\cos(w_1) - \mathbf{i}\sin(w_2)]\,[\cos(w_2) - \mathbf{i}\sin(w_2)]}{2\mathbf{i}} \\
&= \sin(w_1)\cos(w_2) + \cos(w_1)\sin(w_2).
\end{aligned}$$

□

Proposition 4.13. Soit $w_1, w_2 \in \mathbb{T}$, alors $\cos(w_1 + w_2) = \cos(w_1)\cos(w_2) - \sin(w_1)\sin(w_2)$.

Démonstration.
On a que

$$\begin{aligned}
\cos(w_1 + w_2) &= \frac{e^{\mathbf{i}(w_1+w_2)} + e^{-\mathbf{i}(w_1+w_2}}{2} \\
&= \frac{e^{\mathbf{i}w_1}e^{\mathbf{i}w_2} + e^{-\mathbf{i}w_1}e^{-\mathbf{i}w_2}}{2\mathbf{i}} \\
&= \frac{[\cos(w_1) + \mathbf{i}\sin(w_1)]\,[\cos(w_2) + \mathbf{i}\sin(w_2)] + [\cos(w_1) - \mathbf{i}\sin(w_2)]\,[\cos(w_2) - \mathbf{i}\sin(w_2)]}{2\mathbf{i}} \\
&= \cos(w_1)\cos(w_2) - \sin(w_1)\sin(w_2).
\end{aligned}$$

□

Beaucoup d'autres propriétés auraient pu être démontrées. Mais nous allons voir un peu plus loin qu'avec une approche analytique des tétranombres, la plupart des identités trigonométriques seront valides. Évidemment, les identités utilisant la division seront considérées comme pathologiques à causes des éléments non-inversibles.

Chapitre

5 Coordonnées hyper-polaires

Dans ce chapitre, on explore la possibilité des coordonnées polaires pour le cas des tétranombres. On y verra aussi certaines conséquences.

Avec la venue de l'exponentielle, il est naturel de se demander si quelque chose d'analogue aux coordonnées polaires existe pour les tétranombres.

Pour répondre à cette question, il est nécessaire de vérifier si il existe une trigonométrie pour les nombres complexes qui serait analogue à celle des nombres réels.

Rappel :

Soit le triangle de la figure 5.1

On a $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Alors, $\cos(\mu) = \frac{a}{r}$, $\sin(\mu) = \frac{b}{r}$ et $\arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \mu$. Aussi, $r \cdot \cos(\arctan(b/a)) = a$ et $r \cdot \sin(\arctan(b/a)) = b$, si $a \neq 0$.

De plus, à l'aide de convention de signes, nous pouvons aussi traiter les cas où $a < 0$ ou $b < 0$.

Pour les nombres complexes, il est aussi possibles de démontrer des résultats analogues. Pour cela, il faut d'abord préciser une notion de norme complexe pour les tétranombres.

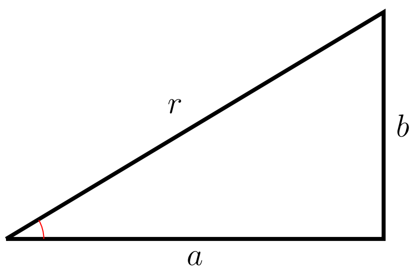

Figure 5.1 – Un triangle de cathètes a et b et d'un hypoténuse r

Définition 5.1. On appelle la norme complexe d'un tétranombre, la fonction suivante : $\| \ \|$: $\mathbb{T} \to \mathbb{C}'$,

$$w = (a + b\mathbf{i}') + (c + d\mathbf{i}')\mathbf{i} \longleftarrow \sqrt{(a + b\mathbf{i}')^2 + (c + d\mathbf{i}')^2} = \sqrt{w\overline{w}}.$$

Remarque 5. Ce n'est pas une vraie norme. ▲

Évidemment, nous devons ici préciser ce que représente la racine carrée. Théoriquement, c'est une fonction multiforme. Or, ici nous voulons que la norme complexe soit définie comme une fonction uniforme.

Rappel :

$$(\alpha + \beta\mathbf{i})^{1/2} = \pm\left(\sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}} + \mathbf{i}\cdot\operatorname{sign}(\beta)\sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}\right).$$

Dans notre cas, pour obtenir une fonction uniforme, nous allons utiliser celle-ci :

$$\sqrt{\alpha + \beta\mathbf{i}} = \sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}} + \mathbf{i}\cdot\operatorname{sign}(\beta)\sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}.$$

Remarque 6. Cette définition est légitime, car si on pose $w = a + b\mathbf{i} \in \mathbb{C}$, alors

$$\|w\| = \|(a + 0\mathbf{i}') + (b + 0\mathbf{i}')\mathbf{i}\| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Donc, $|a + b\mathbf{i}| = \|a + b\mathbf{i}\|$. Par contre, $|a + b\mathbf{i}'| \neq \|a + b\mathbf{i}'\|$. ▲

Lemme 5.1. Soit $a + b\mathbf{i}$ et $c + d\mathbf{i} \in \mathbb{C}$. Si $a + b\mathbf{i} \neq 0$ et si a, b, c et d ne sont pas des deux formes suivantes :

1. $a = d$ et $b = -c$;
2. $a = -d$ et $b = c$.

Alors,

$$(a + b\mathbf{i})^2 = \left[(a + \mathbf{i}')^2 + (c + d\mathbf{i})^2\right]\cdot\cos^2\left(\arctan\left(\frac{c + d\mathbf{i}}{a + b\mathbf{i}}\right)\right). \qquad (*)$$

Démonstration.
Avant tout, il faut montrer que l'expression a un sens. Comme $a + b\mathbf{i} \neq 0$, alors $\frac{c+d\mathbf{i}}{a+b\mathbf{i}}$ a un sens. Aussi, $\arctan(z) = \frac{1}{2\mathbf{i}}\log\left(\frac{1+\mathbf{i}z}{1-\mathbf{i}z}\right) + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$; donc, si on pose $z = \frac{c+d\mathbf{i}}{a+b\mathbf{i}}$, l'expression suivante :

$$\frac{1+\mathbf{i}z}{1-\mathbf{i}z} = \frac{1 + \mathbf{i}\left(\frac{c+d\mathbf{i}}{a+b\mathbf{i}}\right)}{1 - \mathbf{i}\left(\frac{c+d\mathbf{i}}{a+b\mathbf{i}}\right)} = \frac{a + b\mathbf{i} - (d - \mathbf{i}c)}{a + b\mathbf{i} + (d - \mathbf{i}c} = \frac{a - d + \mathbf{i}(b + c)}{a + d + \mathbf{i}(b - c)}$$

a un sens si a, b, c et d ne satisfont pas les équations suivantes : $a = -d$ et $b = c$.

De plus, le $\log\left(\frac{1+\mathbf{i}z}{1-\mathbf{i}z}\right)$ a un sens si, et seulement si, $\frac{1+\mathbf{i}z}{1-\mathbf{i}z} \neq 0$; *i.e.* lorsque a, b, c et d ne sont pas de la forme suivantes : $a = d$ et $b = -c$. Donc, $\arctan(z)$ a un sens si, et seulement si, a, b, c et d ne sont pas des deux formes suivantes :

1. $a = -d$ et $b = c$;
2. $a = d$ et $b = -c$.

Par conséquent, les hypothèses du leme nous assurent de la cohérence de l'expression $(*)$.

Démontrons maintenant le résultat. On pose $u = a + b\mathbf{i}$, $v = d - c\mathbf{i}$ et

$$P = \arctan\left(\frac{c+d\mathbf{i}}{a+b\mathbf{i}}\right) = \frac{1}{2\mathbf{i}}\log\left(\frac{u-v}{u+v}\right) + k\pi.$$

Alors,

$$\cos^2(P) = \frac{e^{2\mathbf{i}P} + e^{-2\mathbf{i}P} + 2}{4} = \frac{\frac{u-v}{u+v} + \frac{u+v}{u-v} + 2}{4}.$$

Or,

$$\frac{u-v}{u+v} = 1 - \frac{2v}{u+v}$$

et

$$\frac{u+v}{u-v} = 1 + \frac{2v}{u-v}.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{u-v}{u+v} + \frac{u+v}{u-v} + 2}{4} &= \frac{4 + 2v\left(\frac{1}{u-v} - \frac{1}{u+v}\right)}{4} = \frac{4 + 2v\left(\frac{2v}{(u-v)(u+v)}\right)}{4} \\
&= \frac{4 + \frac{4v^2}{u^2-v^2}}{4} = 1 + \frac{v^2}{u^2-v^2} = 1 + \frac{(d-c\mathbf{i})^2}{(a+b\mathbf{i})^2 + (c+d\mathbf{i})^2} \\
&= 1 - \frac{(c+d\mathbf{i})^2}{(a+b\mathbf{i})^2 + (c+d\mathbf{i})^2}
\end{aligned}$$

en utilisant le fait que $-(d - c\mathbf{i})^2 = (c + d\mathbf{i})^2$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\left[(a+b\mathbf{i})^2 + (c+d\mathbf{i})^2\right] \cdot \cos^2\left(\arctan\left(\frac{c+d\mathbf{i}}{a+b\mathbf{i}}\right)\right) &= (a+b\mathbf{i})^2 + (c+d\mathbf{i})^2 - (c+d\mathbf{i})^2 \\
&= (a+b\mathbf{i})^2.
\end{aligned}$$

$\square$

Lemme 5.2. Soit $a+b\mathbf{i}$ et $c+d\mathbf{i} \in \mathbb{C}$. Si $a+b\mathbf{i} \neq 0$ et a, b, c et d ne sont pas des deux formes suivantes

1. $a = d$ et $b = -c$;
2. $a = -d$ et $b = c$.

Alors

$$(c+d\mathbf{i})^2 = \left[(a+b\mathbf{i})^2 + (c+d\mathbf{i})^2\right] \cdot \sin^2\left(\arctan\left(\frac{c+d\mathbf{i}}{a+b\mathbf{i}}\right)\right) \qquad (**)$$

Démonstration.
L'expression $(**)$ a un sens, la preuve est la même que pour le lemme 5.1.

On pose $u = a+b\mathbf{i}$, $v = d - c\mathbf{i}$ et

$$P = \arctan\left(\frac{c+d\mathbf{i}}{a+b\mathbf{i}}\right) = \frac{1}{2\mathbf{i}}\log\left(\frac{u-v}{u+v}\right) + k\pi.$$

Alors,

$$\begin{aligned}\sin^2(P) &= \frac{-(e^{2\mathbf{i}P} + e^{-2\mathbf{i}P} - 2)}{4}\\ &= \frac{2 - e^{2\mathbf{i}P} - e^{-2\mathbf{i}P}}{4}\\ &= \frac{2 - \frac{u-v}{u+v} - \frac{u+v}{u-v}}{4}.\end{aligned}$$

Or,

$$\frac{u-v}{u+v} = 1 - \frac{2v}{u+v}$$

et

$$\frac{u+v}{u-v} = 1 + \frac{2v}{u-v}.$$

Donc,

$$\begin{aligned}\frac{-\frac{u-v}{u+v} - \frac{u+v}{u-v}}{4} &= \frac{-1 + \frac{2v}{u+v} - 1 - \frac{2v}{u-v} + 2}{4}\\ &= \frac{2v\left[\frac{1}{u+v} - \frac{1}{u-v}\right]}{4}\\ &= \frac{2v\left(\frac{-2v}{u^2-v^2}\right)}{4} = \frac{\frac{-4v^2}{u^2-v^2}}{4}\\ &= \frac{v^2}{u^2-v^2}\\ &= \frac{-(d-c\mathbf{i})^2}{(a+b\mathbf{i})^2 - (c+d\mathbf{i})^2}\\ &= \frac{(c+d\mathbf{i})^2}{(a+b\mathbf{i})^2 + (c+d\mathbf{i})^2}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\left[(a+b\mathbf{i})^2+(c+d\mathbf{i})^2\right]\cdot\sin^2\left(\arctan\left(\frac{c+d\mathbf{i}}{a+b\mathbf{i}}\right)\right).$$

□

Corollaire 5.1. Soit $w=(a+b\mathbf{i}')+(c+d\mathbf{i}')\mathbf{i}\in\mathbb{T}$. Si $a+b\mathbf{i}'\neq 0$ et si w est inversible, alors

$$(a+b\mathbf{i}')^2=\left[(a+b\mathbf{i}')^2+(c+d\mathbf{i}')^2\right]\cdot\cos^2\left(\arctan\left(\frac{c+d\mathbf{i}'}{a+b\mathbf{i}'}\right)\right).$$

Démonstration.
La preuve découle directement du lemme 5.1. Évidemment, toutes les fonctions comme sin, cos, arctan, $\sqrt{\ }$, etc. doivent être utilisées dans le sens de $\mathbb{C}'$. □

De même

Corollaire 5.2. Soit $w=(a+b\mathbf{i}')+(c+d\mathbf{i}')\mathbf{i}\in\mathbb{T}$. Si $a+b\mathbf{i}'\neq 0$ et si w est inversible, alors

$$(c+d\mathbf{i}')^2=\left[(a+b\mathbf{i}')^2+(c+d\mathbf{i}')^2\right]\cdot\sin^2\left(\arctan\left(\frac{c+d\mathbf{i}'}{a+b\mathbf{i}'}\right)\right).$$

Démonstration.
La preuve découle directement du lemme 5.2. □

Voici maintenant le théorème de la mise en coordonnées hyper-polaires.

Théorème 5.1. Tout tétranombres $w=(a+b\mathbf{i}')+(c+d\mathbf{i}')\mathbf{i}$ qui est <u>inversible</u> et tel que $(a+b\mathbf{i}')\neq 0$ peut être exprimé de la façon suivante :

$$w=(a+b\mathbf{i}')+(c+d\mathbf{i}')\mathbf{i}=(r_1+r_2\mathbf{i}')\cdot e^{(\theta_1+\theta_2\mathbf{i}')\mathbf{i}}$$

i.e. $w=re^{\theta\mathbf{i}}$ où $r,\theta\in\mathbb{C}'$. De plus

$$r_1+r_2\mathbf{i}'=\|(a+b\mathbf{i}'+(c+d\mathbf{i}')\mathbf{i}\|$$

et

$$\theta_1+\theta_2\mathbf{i}'=\arctan\left(\frac{c+d\mathbf{i}'}{a+b\mathbf{i}'}\right)=\left(\frac{\theta}{2}+k\pi+2L\pi\right)+\ln\left(\frac{\sqrt{r}}{r}\right)\mathbf{i}'$$

où $L \in \mathbb{Z}$; avec r et θ venant de la mise en coordonnées polaires de $\frac{a-d+\mathbf{i}'(b+c)}{a+d+\mathbf{i}'(b-c)} = re^{\mathbf{i}'\theta}$ et où k est choisi entre 0 et 1 tel que $\|w\| \cos(\theta_1 + \theta_2 \mathbf{i}') = a + b\mathbf{i}'$, *i.e.* avec le bon signe.

Démonstration.
On sait que

$$(a+b\mathbf{i}')^2 = \left[(a+b\mathbf{i}')^2 + (c+d\mathbf{i}')^2\right] \cdot \cos^2\left(\arctan\left(\frac{c+d\mathbf{i}'}{a+b\mathbf{i}'}\right)\right).$$

Ceci implique que

$$a+b\mathbf{i}' = \pm\sqrt{(a+b\mathbf{i}')^2 + (c+d\mathbf{i}')^2} \cdot \cos\left(\arctan\left(\frac{c+d\mathbf{i}'}{a+b\mathbf{i}'}\right)\right).$$

De plus,

$$(c+d\mathbf{i}')^2 = \left[(a+b\mathbf{i}')^2 + (c+d\mathbf{i}')^2\right] \cdot \sin^2\left(\arctan\left(\frac{c+d\mathbf{i}'}{a+b\mathbf{i}'}\right)\right).$$

Donc, on aura aussi que

$$c+d\mathbf{i}' = \pm\sqrt{(a+b\mathbf{i}')^2 + (c+d\mathbf{i}')^2} \cdot \sin\left(\arctan\left(\frac{c+d\mathbf{i}'}{a+b\mathbf{i}'}\right)\right).$$

Nous ne pouvons pour le moment savoir lequel du $+$ ou du $-$ apparaitra, car la fonction racine carrée est multiforme et le fait de distribuer celle-ci peut engendrer un changement de signe.

La norme complexe définie antérieurement n'est en fait qu'un des deux signes de

$$\sqrt{(a+b\mathbf{i}')^2 + (c+d\mathbf{i}')^2}.$$

Nous pouvons donc écrire :

$$a+b\mathbf{i}' = \pm\|w\| \cos\left(\arctan\left(\frac{c+d\mathbf{i}'}{a+b\mathbf{i}'}\right)\right)$$

et

$$c+d\mathbf{i}' = \pm\|w\| \sin\left(\arctan\left(\frac{c+d\mathbf{i}'}{a+b\mathbf{i}'}\right)\right).$$

Mais cela ne nous sort pas de l'impasse du signe. La solution à l'impasse nous est livrée grâce à une forme de convention de signe. Soit

$$\frac{(a-d)+\mathbf{i}'(b+c)}{(a+d)+\mathbf{i}'(b-c)} = re^{\mathbf{i}'\theta}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\arctan\left(\frac{c+d\mathbf{i}'}{a+b\mathbf{i}'}\right) &= \frac{1}{2\mathbf{i}'}\log(re^{\mathbf{i}'\theta} + m\pi) \\
&= \frac{1}{2\mathbf{i}'}\left(\ln(r) + \mathbf{i}'(\theta + 2n\pi)\right) \\
&= \left(-\frac{1}{2}\ln(r)\right)\mathbf{i}' + \left(\frac{\theta}{2} + k\pi\right)
\end{aligned}$$

où $n, m, k \in \mathbb{Z}$. Il y a donc plusieurs angles possibles selon k.

Soit maintenant

$$\theta_1 + \theta_2\mathbf{i}' = \left(\frac{\theta}{2} + k\pi\right) + \left(-\frac{1}{2}\ln(r)\right)\mathbf{i}' = (\theta_1' + k\pi) + (\theta_2')\mathbf{i}'$$

avec $k \in \mathbb{Z}$, alors

$$\begin{aligned}\cos\left((\theta_1' + k\pi) + \theta_2'\mathbf{i}'\right) &= \frac{e^{-\theta_2' + (\theta_1' + k\pi)\mathbf{i}'} + e^{\theta_2' - (\theta_1' + k\pi)\mathbf{i}'}}{2} \\ &= \frac{e^{-\theta_2'}e^{\theta_1'\mathbf{i}'}e^{k\pi\mathbf{i}'} + e^{\theta_2'}e^{-\theta_1'\mathbf{i}'}e^{-k\pi\mathbf{i}'}}{2}.\end{aligned}$$

Si k est **pair**, alors

$$\cos\left((\theta_1' + k\pi) + \theta_2'\mathbf{i}'\right) = \frac{e^{-\theta_2'}e^{\theta_1'\mathbf{i}'} + e^{\theta_2'}e^{-\theta_1'\mathbf{i}'}}{2}$$

et si k est **impair**, alors

$$\cos\left((\theta_1' + k\pi) + \theta_2'\mathbf{i}'\right) = -\left(\frac{e^{-\theta_2'}e^{\theta_1'\mathbf{i}'} + e^{\theta_2'}e^{-\theta_1'\mathbf{i}'}}{2}\right).$$

Il suffit donc de choisir l'angle $\theta_1 + \theta_2\mathbf{i}'$ (*i.e.* k), de façon à ce que

$$Vertw\| \cos(\theta_1 + \theta_2\mathbf{i}') = a + b\mathbf{i}' \tag{$*$}$$

(*i.e.* avec le bon signe).

Mais il reste encore le problème de savoir si le choix de l'angle fait aussi en sorte que :

$$\|w\| \sin(\theta_1 + \theta_2\mathbf{i}') = c + d\mathbf{i}'$$

(*i.e.* avec le bon signe).

Supposons le contraire. Soit $\theta_1+\theta_2\mathbf{i}'$ tel que $(*)$ soit satisfait et que $\|w\| \sin(\theta_1+\theta_2\mathbf{i}') = -c-d\mathbf{i}' \neq 0$. Ceci implique que

$$\frac{-(c + d\mathbf{i}')}{a + b\mathbf{i}'} = \frac{\|w\| \sin(\theta_1 + \theta_2\mathbf{i}')}{\|w\| \cos(\theta_1 + \theta_2\mathbf{i}')} = \tan(\theta_1 + \theta_2\mathbf{i}'),$$

i.e.

$$\frac{-(c + d\mathbf{i}')}{a + b\mathbf{i}'} = \tan\left(\arctan\left(\frac{c + d\mathbf{i}'}{a + b\mathbf{i}'}\right)\right) = \frac{c + d\mathbf{i}'}{a + b\mathbf{i}'}.$$

On obtient donc que $-1 = 1$, ce qui est une contradiction.

Donc, notre choix d'angle est parfaitement consistant.

Aussi, une fois $\theta_1 + \theta_2\mathbf{i}'$ choisi (*i.e.* k fixé), tout autre angle de la forme $(\theta_1 + 2L\pi) + \theta_2\mathbf{i}'$ avec $L \in \mathbb{Z}$ est équivalent. Et donc, pour un θ tel que $\frac{(a-d)+\mathbf{i}'(b+c)}{(a+d)+\mathbf{i}'(b-c)} = re^{\mathbf{i}'\theta}$, nous avons l'ensemble solution suivant :

$$\theta_1 + \mathbf{i}'\theta_2 = \left(\frac{\theta}{2} + k\pi + 2L\pi\right) + \mathbf{i}'\ln\left(\frac{\sqrt{r}}{r}\right)$$

avec $L \in \mathbb{Z}$. On voit aussi que le θ aurait pu être choisi comme $\theta + 2k\pi$, mais cette possibilité est déjà inclue dans l'énoncé précédent.

Le reste de la preuve du théorème est trivial, car un fois que l'on a déterminé r_1, r_2, θ_1 et θ_2, on obtient que

$$\|w\| \cos(\theta_1 + \theta_2 \mathbf{i}') = a + b\mathbf{i}' \text{ et } \|w\| \sin(\theta_1 + \theta_2 \mathbf{i}') = c + d\mathbf{i}'.$$

Donc

$$\begin{aligned} \|w\| e^{\theta_1 + \theta_2 \mathbf{i}')\mathbf{i}} &= \| \left(\cos(\theta_1 + \theta_2 \mathbf{i}') + \mathbf{i} \sin(\theta_1 + \theta_2 \mathbf{i}') \right) \\ &= \|w\| \cos(\theta_1 + \theta_2 \mathbf{i}') + \mathbf{i} \|w\| \sin(\theta_1 + \theta_2 \mathbf{i}') \\ &= (a + b\mathbf{i}') + (c + d\mathbf{i}')\mathbf{i}. \end{aligned}$$

□

Dans le cas où w est non-inversible, on a que $\|w\| = 0$. Ainsi, la mise en coordonnée hyper-polaire de celui-ci est impossible, à l'exception de $(0,0,0,0) = (0 + 0\mathbf{i}')e^{(\theta_1 + \theta_2 \mathbf{i}')\mathbf{i}}$.

Il nous reste cependant à traiter le cas où $a + b\mathbf{i}' = 0$ avec $c + d\mathbf{i}' \neq 0$.

Théorème 5.2. Tout tétranombre $w = (a + b\mathbf{i}') + (c + d\mathbf{i}')\mathbf{i}$ qui est tel que $a + b\mathbf{i}' = 0$ et $c + d\mathbf{i}' \neq 0$, peut être exprimé de la façon suivante :

$$w = (c + d\mathbf{i}')\mathbf{i} = (r_1 + r_2)e^{(\theta_1 + \theta_2 \mathbf{i}')\mathbf{i}}$$

où $r_1 + r_2 \mathbf{i}' = \|(c + d\mathbf{i}')\mathbf{i}\|$ et $\theta_1 + \theta_2 \mathbf{i}' = \frac{\pi}{2} + k\pi + 2L\pi$ où $L \in \mathbb{Z}$; avec k choisi tel que $\|w\| \sin(\theta_1 + \theta_2 \mathbf{i}') = c + d\mathbf{i}'$, *i.e.* avec le bon signe.

Démonstration.
D'un côté,

$$\begin{aligned} \cos(\theta_1 + \theta_2 \mathbf{i}') &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \\ &= \frac{e^{\mathbf{i}'\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)} + e^{-\mathbf{i}'\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)}}{2} \\ &= \frac{e^{\mathbf{i}'\frac{\pi}{2}} e^{\mathbf{i}' k\pi} + e^{-\mathbf{i}'\frac{\pi}{2}} e^{-\mathbf{i}' k\pi}}{2} \\ &= \frac{\mathbf{i}' e^{\mathbf{i}' k\pi} - \mathbf{i}' e^{-\mathbf{i}' k\pi}}{2} = 0. \end{aligned}$$

La dernière égalité vient du fait que $e^{\mathbf{i}' k\pi} = e^{-\mathbf{i}' k\pi}$.

D'un autre côté,

$$\begin{aligned} \|w\| \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) &= \sqrt{(c + d\mathbf{i}')^2} \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \\ &= \pm(c + d\mathbf{i}') \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right). \end{aligned}$$

Or, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=\pm 1$, selon k. C'est-à-dire,

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) &= \frac{e^{\mathbf{i}'\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)}-e^{\mathbf{i}'\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)}}{2\mathbf{i}} \\ &= \frac{e^{\mathbf{i}'\frac{\pi}{2}}e^{\mathbf{i}'k\pi}-e^{-\mathbf{i}'\frac{\pi}{2}}}{2\mathbf{i}} \\ &= \frac{e^{\mathbf{i}'k\pi}+e^{-\mathbf{i}'k\pi}}{2} \\ &= \frac{2e^{\mathbf{i}'k\pi}}{2}=e^{\mathbf{i}'k\pi}\end{aligned}$$

qui est égal à 1 si k est pair et -1 si k est impair.

On choisi le k de façon à ce que $c+d\mathbf{i}'=\|w\|\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$. Ce qui implique que

$$w=(c+d\mathbf{i}')\mathbf{i}=\|w\|\cos(\theta_1+\theta_2\mathbf{i}')+\mathbf{i}\|w\|\sin(\theta_1+\theta_2\mathbf{i}').$$

En résumé,

$$r_1+r_2\mathbf{i}'=\|(c+d\mathbf{i}')\mathbf{i}\|=c+d\mathbf{i}' \text{ ou } -c-d\mathbf{i}'$$

et

$$\theta_1+\theta_2\mathbf{i}'=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

i.e. avec $\theta_2=0$. De plus, une fois le bon k choisi, il est évident que $\phi=\theta_1+2L\pi$ avec $L\in\mathbb{Z}$ donne le même résultat. □

Remarque 7. Les deux théorèmes précédents nous indiquent que tous les tétranombres peuvent être écrits en coordonnées hyper-polaires. ▲

Proposition 5.1. Soit $w_1=\|w_1\|e^{(\theta_1+\theta_2\mathbf{i}')\mathbf{i}}$ et $w_2=\|w_2\|e^{(\theta_3+\theta_4\mathbf{i}')\mathbf{i}}$ avec w_1 et w_2 inversibles. Alors

$$w_1w_2=\|w_1\|\|w_2\|e^{((\theta_1+\theta_3)+(\theta_2+\theta_4)\mathbf{i}')\mathbf{i}}.$$

Démonstration.
On voit directement que

$$\begin{aligned}w_1w_2 &= \|w_1\|e^{(\theta_1+\theta_2\mathbf{i}')\mathbf{i}}\|w_2\|e^{(\theta_3+\theta_4\mathbf{i}')\mathbf{i}} \\ &= \|w_1\|\|w_2\|e^{(\theta_1+\theta_2\mathbf{i}')\mathbf{i}}e^{(\theta_3+\theta_4\mathbf{i}')\mathbf{i}}=\|w_1\|\|w_2\|e^{((\theta_1+\theta_3)+(\theta_2+\theta_4)\mathbf{i}')\mathbf{i}}\end{aligned}$$

□

Théorème 5.3. Soit w_1 et $w_2 \in \mathbb{T}$ et inversibles. Sachant que l'on peut écrire $w_1 = \|w_1\|e^{(\theta_1+\theta_2\mathbf{i}')\mathbf{i}}$ et $w_2 = \|w_2\|e^{(\theta_3+\theta_4\mathbf{i}')\mathbf{i}}$, alors on a que $w_1 = w_2$ (*i.e.* $\|w_1\|e^{(\theta_1+\theta_2\mathbf{i}')\mathbf{i}} = \|w_2\|e^{(\theta_3+\theta_4\mathbf{i}')\mathbf{i}}$) si, et seulement si,

1. $\|w_1\| = \|w_2\|$ avec $\theta_2 = \theta_4$ et $\theta_1 = \theta_3 + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ ou ;
2. $\|w_1| = -\|w_2\|$ avec $\theta_2 = \theta_4$ et $\theta_1 = \theta_3 + \pi(2k+1)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Démonstration.
Si $\|w_1\| = \|w_2\|$ avec $\theta_2 = \theta_4$ et $\theta_1 = \theta_3 + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, alors en utilisant le fait que $e^{((\theta_3+2k\pi)+\theta_4\mathbf{i}')\mathbf{i}} = e^{(\theta_3+\theta_4\mathbf{i}')\mathbf{i}}$ $\forall k \in \mathbb{Z}$, on obtient que $\|w_1\|e^{(\theta_1+\theta_2\mathbf{i}')\mathbf{i}} = \|w_2\|e^{(\theta_3+\theta_4\mathbf{i}')\mathbf{i}}$.

D'autre part, si $\|w_1\| = -\|w_2\|$ avec $\theta_2 = \theta_4$ et $\theta_1 = \theta_3+\pi(2k+1) = \theta_3+\pi+2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, alors en utilisant le fait que $e^{((\theta_3+\pi+2k\pi)+\theta_4\mathbf{i}')\mathbf{i}} = -e^{(\theta_3+\theta_4\mathbf{i}')\mathbf{i}}$, on obtient que $\|w_1\|e^{(\theta_1+\theta_2\mathbf{i}')\mathbf{i}} = \|w_2\|e^{\theta_3+\theta_4\mathbf{i}')\mathbf{i}}$.

De plus, si $\|w_1\|e^{(\theta_1\theta_2\mathbf{i}')\mathbf{i}} = \|w_2\|e^{(\theta_3+\theta_4\mathbf{i}')\mathbf{i}}$, alors

$$\|w_1\|\cos(\theta_1+\theta_2\mathbf{i}') = \|w_2\|\cos(\theta_3+\theta_4\mathbf{i}') \text{ et } \|w_1\|\sin(\theta_1+\theta_2\mathbf{i}') = \|w_2\|\sin(\theta_3+\theta_4\mathbf{i}').$$

Donc,

$$\|w_1\|^2\left(\cos^2(\theta_1+\theta_2\mathbf{i}')+\sin^2(\theta_1+\theta_2\mathbf{i}')\right) = \|w_2\|^2\left(\cos^2(\theta_3+\theta_4\mathbf{i}')+\sin^2(\theta_3+\theta_4\mathbf{i}')\right)$$

i.e. $\|w_1\|^2 = \|w_2\|^2$. On obtient ainsi les deux possibles suivants : $\|w_1\| = \|w_2\|$ ou $\|w_1\| = -\|w_2\|$.

Si $\|w_1\| = \|w_2\|$, alors

a) $\cos(\theta_1+\theta_2\mathbf{i}') = \cos(\theta_3+\theta_4\mathbf{i}')$ et ;

b) $\sin(\theta_1+\theta_2\mathbf{i}') = \sin(\theta_3+\theta_4\mathbf{i}')$.

La proposition a) implique que

$$\frac{e^{-\theta_2}e^{\theta_1\mathbf{i}'}+e^{\theta_2}e^{-\theta_1\mathbf{i}'}}{2} = \frac{e^{-\theta_4}e^{\theta_3\mathbf{i}'}+e^{\theta_4}e^{-\theta_3\mathbf{i}'}}{2}.$$

C'est-à-dire que

$$\begin{aligned} e^{\theta_2}\cos(\theta_1)+\mathbf{i}'e^{-\theta_2}\sin(\theta_1)+e^{-\theta_2}\cos(\theta_1)-\mathbf{i}'e^{\theta_2}\sin(\theta_1) = e^{\theta_4}\cos(\theta_3)+\mathbf{i}'e^{-\theta_4}\sin(\theta_3)+e^{-\theta_4}\cos(\theta_3) \\ -\mathbf{i}'e^{\theta_4}\sin(\theta_3). \end{aligned}$$

On obtient ainsi

a1) $\cos(\theta_1)\left[e^{\theta_2}+e^{-\theta_2}\right] = \cos(\theta_3)\left[e^{\theta_4}+e^{-\theta_4}\right]$ et ;

a2) $\sin(\theta_1)\left[e^{\theta_2}-e^{-\theta_2}\right] = \sin(\theta_3)\left[e^{\theta_4}-e^{-\theta_4}\right]$.

De son côté, la proposition b) implique que

$$\frac{e^{-\theta_2}e^{\theta_1\mathbf{i}'}-e^{\theta_2}e^{-\theta_1\mathbf{i}'}}{2\mathbf{i}'} = \frac{e^{-\theta_4}e^{\theta_3\mathbf{i}'}-e^{\theta_4}e^{-\theta_3\mathbf{i}'}}{2\mathbf{i}'}.$$

C'est-à-dire que

$$-e^{\theta_2}\cos(\theta_1)+\mathbf{i}'e^{\theta_2}\sin(\theta_1)+e^{-\theta_2}\cos(\theta_1)+\mathbf{i}'e^{-\theta_2}\sin(\theta_1)=-\,e^{\theta_4}\cos(\theta_3)+\mathbf{i}'e^{\theta_4}\sin(\theta_3)+e^{-\theta_4}\cos(\theta_3)+\mathbf{i}'e^{-\theta_4}\sin(\theta_3).$$

On obtient ainsi

b1) $\cos(\theta_1)\left[e^{\theta_2}-e^{-\theta}\right]=\cos(\theta_3)\left[e^{\theta_4}-e^{-\theta}\right]$ et ;

b2) $\sin(\theta_1)\left[e^{\theta_2}+e^{-\theta_2}\right]=\sin(\theta_3)\left[e^{\theta_4}+e^{-\theta_4}\right]$.

De a2) et b2), on obtient que $\sin(\theta_1)\left[2e^{\theta_2}\right]=\sin(\theta_3)\left[2e^{\theta_4}\right]$, *i.e.* $\sin(\theta_1)\left[e^{\theta_2}\right]=\sin(\theta_3)\left[e^{\theta_4}\right]$.
De a1) et b1), on obtient que $\cos(\theta_1)\left[2e^{\theta_2}\right]=\cos(\theta_3)\left[2e^{\theta_4}\right]$, *i.e.* $\cos(\theta_1)\left[e^{\theta_2}\right]=\cos(\theta_3)\left[e^{\theta_4}\right]$.
Ceci implique que

$$(e^{\theta_2})^2\left(\cos^2(\theta_1)+\sin^2(\theta_1)\right]=(e^{\theta_4})^2\left(\cos^2(\theta_3)+\sin^2(\theta_3)\right).$$

Donc, $\theta_1=\theta_3+k\pi$.

Dans le cas où $\cos(\theta_1)\neq 0$ et $\cos(\theta_3)\neq 0$, alors on peut conclure de a1) et b2) que $\mathrm{tg}(\theta_1)=\mathrm{tg}(\theta_3)$. Ainsi, $\theta_1=\theta_3+k\pi$.

Dans le cas où $\cos(\theta_1)=0$ (par a1), $\cos(\theta_1)=0$ si, et seulement si, $\cos(\theta_3)=0$), on obtient que $\theta_1=\frac{\pi}{2}+n\pi$ et $\theta_3=\frac{\pi}{@}+m\pi$ avec $n,m\in\mathbb{Z}$. Ainsi, $\theta_1=\theta_3+L\pi$ avec $L\in\mathbb{Z}$. De plus, le cas où $\theta_1=\theta_3+\pi(2L+1)$ contredit l'hypothèse. donc, $\theta_1=\theta_3+2L\pi$ avec $L\in\mathbb{Z}$. Finalement, le cas $\|w_1\|=-\|w_2\|$ se fait de façon analogue et implique que $\theta_2=\theta_4$ et $\theta_1=\theta_3+\pi(2L+1)$ avec $L\in\mathbb{Z}$. □

Remarque 8. Le théorème 5.3 aurait pu être traité de façon plus générale en considérant les conditions pour que $Pe^{(\theta_1+\theta_2\mathbf{i}')\mathbf{i}}=Qe^{(\theta_2+\theta_4\mathbf{i}')\mathbf{i}}$. Le résultat en reste le même, si on considère P et Q inversibles et éléments des complexes primes. ▲

De cette remarque et de la proposition 5.1, nous pouvons dire que

$$w_1w_2=\|w_1\|\|w_2\|e^{((\theta_1+\theta_3)+(\theta_2+\theta_4)\mathbf{i}')\mathbf{i}}=\|w_1w_2\|e^{(\theta_5+\theta_6\mathbf{i}')\mathbf{i}}$$

si et seulement si

$$\|w_1w_2\|=\|w_1\|\|w_2\|\text{ avec }\theta_6=\theta_2+\theta_4\text{ et }\theta_5=(\theta_1+\theta_3)+2k\pi\text{ où }k\in\mathbb{Z}$$

ou

$$\|w_1w_2\|=-\|w_1\|\|w_2\|\text{ avec }\theta_6=\theta_2+\theta_4\text{ et }\theta_5=(\theta_1+\theta_3)+\pi(2k+1)\text{ où }k\in\mathbb{Z}.$$

Chapitre

6 Le logarithme

Dans ce chapitre, on verra comment étendre le logarithme pour l'ensemble des tétranombres. Aussi, on y discutera de ses conséquences possibles.

Après avoir défini l'exponentielle, il est logique de se demander si une généralisation du logarithme népérien est possible. À la lumière des théorèmes précédents, il semble possible de trouver une fonction (multiforme) inverse de la fonction exponentielle. Nous allons voir pourquoi.

On cherche $q = \log w$ comme étant une solution de l'équation $e^q = w$. Soit $q = z_3 + z_4\mathbf{i}$ où $z_3 = e + f\mathbf{i}'$ et $z_4 = g + h\mathbf{i}'$.

Comme $w = e^q$ (donc inversible), on peut écrire $w = \|w\| \cdot e^{(\theta_1+\theta_2\mathbf{i}')\mathbf{i}}$. Donc

$$e^q = e^{z_3}e^{z_4\mathbf{i}} = \|w\| \cdot e^{(\theta_1+\theta_2\mathbf{i}')\mathbf{i}} \tag{$*$}$$

Or, par le théorème 5.3 et sa remarque en page 44, on a l'égalité $(*)$ si, et seulement si,

1. $\|w\| = e^{z_3}$ avec $h = \theta_2$ et $g = \theta_1 + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ ou ;
2. $\|w\| = -e^{z_3}$ avec $h = \theta_2$ et $g = \theta_1 + (2k+1)\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Donc,

$$q = \log w = \log \|w\| + \mathbf{i}\left[(\theta_1 + 2k\pi) + \theta_2\mathbf{i}'\right]$$

ou

$$q = \log(-\|w\|) + \mathbf{i}\left[(\theta_1 + (2k+1)\pi) + \theta_2\mathbf{i}'\right]$$

avec $k \in \mathbb{Z}$.

Explicitement, pour $w = (a, b, c, d) = z_1 + z_2\mathbf{i}$,

$$\|w\| = \sqrt{z_1 + z_2} \text{ (algébriquement positive)}$$

$$\theta_1 = \frac{\theta}{2} + L\pi \text{ et } \theta_2 = \ln\left(\frac{\sqrt{r}}{r}\right)$$

où $\frac{(a-d)+\mathbf{i}'(b+c)}{(a+d)+(b-c)\mathbf{i}'} = re^{\theta \mathbf{i}'}$ avec le « L » choisi correctement entre 0 et 1 afin d'avoir le bon signe (voir théorème 5.1.

On constate aussi que chacune des solutions possibles s'avèrent être de vraies solutions. Ainsi, on a caractérisé toutes les solutions possibles « q », telles que $e^q = w$.

Remarque 9.

1. On peut maintenant définir w^q où $w, q \in \mathbb{T}$ comme $w^q = e^{q \log w}$. À noter ici qu'il faudrait prendre la détermination principale de $\log(w)$, qui pourrait être la détermination principale de $\log \|w\|$ et $-\pi \leq \theta_1 < \pi$.
2. Ainsi, $a^w = e^{w \log(a)}$ pour $a > 0$. On peut donc généraliser la fonction zêta de Riemann aux tétranombres.
3. En particulier, les solutions du log complexe sont élargies par les tétranombres.
4. Plus généralement, toute la théorie en ce qui à trait aux coordonnés polaires, la caractérisation des inverses, l'exponentielle, le logarithme, etc., généralise directement la théorie faite pour les nombres complexes. elle donne aussi une théorie analogue pour les nombres hyperboliques. Comme quoi, ces deux structures ne sont pas si loin l'une de l'autre (cela sera encore plus explicite lorsque l'on verra les théorèmes d'analyse). Pour le moment, je voudrais seulement expliciter l'exponentielle pour le sous-anneau des nombres hyperboliques :

$$e^{a+d\mathbf{j}} = e^a \left[\cosh(d) + \mathbf{j} \sinh(d)\right] \text{ (cela se vérifie facilement)}$$

et

$$\|a + d\mathbf{j}\| = \sqrt{a^2 - d^2}$$

qui est le rayon d'une hyperbole $x^2 - y^2 = r^2$ (Pour les nombres complexes, c'est le rayon d'un cercle).
De plus, les éléments non-inversibles sont les deux asymptotes des hyperboles.
Il est à noter que ces résultats sur les nombres hyperboliques ont déjà commencés à être traités, voir [14]. Mais cela est fait sans le contexte général des tétranombres.
5. Ces relations sont d'autant plus intéressantes qu'il est démontré dans [4] que si l'on veut généraliser raisonnablement les nombres réels à une algèbre de dimension 2, il n'est possible d'ibtenir que les trois structures suivantes : les nombres *complexes*, les nombres *hyperboliques ou les nombres duals* ; ces derniers étant de la forme $a + b\mathbf{k}$ avec $\mathbf{k^2} = 0$.

▲

Chapitre

7 Les normes

Ce chapitre se verra voué à l'exploration de diverses normes sur les tétranombres ainsi qu'à certaines de leurs propriétés.

Nous avons défini précédemment une forme de norme à valeur dans $\mathbb{C}'$. Nous avons aussi vu que si w_1 et $w_2 \in \mathbb{T}$ sont inversibles, alors $\|w_1 w_2\| = \pm\|w_1\|\|w_2\|$, le signe étant à déterminer à chaque fois.

Cependant, la fonction $\| \ \|$ est loin d'être une norme à proprement dite, principalement parce qu'elle est à valeur dans les complexes prime, Pour pallier à cela, nous pourrions prendre la norme de ce dit nombre complexe prime, *i.e.* $|\|w\||' \in \mathbb{R}$ où $| \ |'$ est la norme dans $\mathbb{C}'$.

Malheureusement, cette nouvelle forme ne nous donne pas encore une vraie norme. Par contre, quelques propriétés intéressantes en ressortent quand même, le voici :

Proposition 7.1. Soit w_1, $w_2 \in \mathbb{T}$. Si w_1 et w_2 sont inversibles, alors $|\|w_1\||' \, |\|w_2\||' = |\|w_1 w_2\||'$.

Démonstration.
On a déjà vu que $\|w_1 w_2\| = \pm\|w_1\|\|w_2\|$, donc $|\|w_1 w_2\||' = |\|w_1\|\|w_2\||' = |\|w_1\||' \, |\|w_2\||'$. □

Proposition 7.2. Soit $w \in \mathbb{T}$. Si w est inversible, alors $|\|w\||' = |\|w^{-1}\||'$.

Démonstration.
Soit $w = (a + b\mathbf{i}') + (c + d\mathbf{i}')\mathbf{i}$ et inversible. Montrons d'abord que $\|w\|^{-1} = \pm\|w^{-1}\|$ (le signe étant

à déterminer à chaque fois). On a que

$$\|w\|^{-1} = \left(\sqrt{(a+b\mathbf{i}')^2+(c+d\mathbf{i}')^2}\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{(a+b\mathbf{i}')^2+(c+d\mathbf{i}')^2}}.$$

Aussi,

$$w^{-1} = \frac{a+b\mathbf{i}'}{(a+b\mathbf{i}')^2+(c+d\mathbf{i}')^2} - \mathbf{i}\frac{c+d\mathbf{i}'}{(a+b\mathbf{i}')^2+(c+d\mathbf{i}')^2}.$$

Donc,

$$\begin{aligned}\|w^{-1}\| &= \sqrt{\frac{(a+b\mathbf{i}')^2}{[(a+b\mathbf{i}')^2+(c+d\mathbf{i}')^2]^2} + \frac{(c+d\mathbf{i}')^2}{[(a+b\mathbf{i}')^2+(c+d\mathbf{i}')^2]^2}}\\ &= \sqrt{\frac{1}{\frac{c+d\mathbf{i}'}{(a+b\mathbf{i}')^2+(c+d\mathbf{i}')^2}}}\\ &= \pm\frac{1}{\sqrt{\frac{c+d\mathbf{i}'}{(a+b\mathbf{i}')^2+(c+d\mathbf{i}')^2}}}\end{aligned}$$

Ceci implique que $\|w^{-1}\| = \pm\|w\|^{-1}$ et ainsi $|\|w^{-1}\||' = |\|w\||'^{-1}$. □

Proposition 7.3. On peut exprimer explicitement

$$|\|w\||' = \sqrt[4]{(a^2-b^2+c^2-d^2)^2+4(ab+cd)^2}.$$

Démonstration.
Posons $w = (a+b\mathbf{i}') + (c+d\mathbf{i}')\mathbf{i}$, ce qui implique que $w\overline{w} = (a+b\mathbf{i}')^2+(c+d\mathbf{i}')^2$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\|w| = \sqrt{(a+b\mathbf{i}')^2+(c+d\mathbf{i}')^2} &= \sqrt{\alpha+\beta\mathbf{i}'}\\ &= \sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}} + \mathbf{i}'\mathrm{sign}(\beta)\sqrt{\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}.\end{aligned}$$

Donc,

$$|\|w\||' = \sqrt{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \sqrt[4]{\Re\mathrm{e}^2(w\overline{w}) + IM^2(w\overline{w})}$$

où $\alpha = \Re(w\overline{w})$ et $\beta = \Im\mathrm{m}\,(w\overline{w})$. Or

$$(a+b\mathbf{i}')^2+(c+d\mathbf{i}')^2 = (a^2-b^2+c^2-d^2) = (a^2-b^2+c^2-d^2)+2(ab+cd)\mathbf{i}',$$

ainsi

$$|\|w\||' = \sqrt[4]{(a^2-b^2+c^2-d^2)^2+4(ab+cd)^2}.$$

□

Proposition 7.4. Voici une liste de propriétés complémentaires et évidentes :

1. $|||w|||' = 0$ si, et seulement si, w est non-inversible.
2. $\|w\|^2 = w\overline{w}$, ce qui implique que $|||w|||' = |w\overline{w}| = \sqrt{(w\overline{w})\,\widehat{(w\overline{w})}}$.
3. $\|-w\| = \|w\|$ et $|||-w|||' = |||w|||'$.
4. $\|\overline{w}\| = \|w\|$ et $|||\overline{w}|||' = |||w|||'$.
5. $\|\widehat{w}\| = \|w\|$ et $\left|\|\widehat{w}\|\right|' = |||w|||'$.

Par contre, on a pas la propriété fondamentale que $|||w_1 + w_2|||' \leq |||w_1|||' + |||w_2|||'$; il suffit, pour le voir, de considérer w_1 et w_2 non-inversibles avec $w_1 + w_2$ inversible.

Comme nous voulons aborder l'aspect analytique des tétranombres, il nous faut définir une vraie norme.

Définition 7.1. On appellera *norme euclidienne* d'un tétranombre la fonction suivante :

$$\begin{aligned} |\ |_E : \mathbb{T} &\to \mathbb{R} \\ w = (a + b\mathbf{i}') + (c + d\mathbf{i}')\mathbf{i} &\to \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}. \end{aligned}$$

L'intérêt de cette norme ne nous sera révélé qu'un peu plus loin. POur le moment, elle n'a d'intéressant que ses de norme, *i.e.*

1. $|w|_E \geq 0$.
2. $|w|_E = 0 \iff w = 0$.
3. $|w_1 + w_2|_E \leq |w_1|_E + |w_2|_E$.
4. $|\lambda w|_E = |\lambda|\,|w|_E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Ce qui est dommage, c'est que l'on a pas la propriété suivante $|w_1 w_2|_E = |w_1|_E\,|w_2|_E$.

Proposition 7.5. Soit w_1 et $w_2 \in \mathbb{T}$ avec $w_1 = (a, b, c, d)$ et $w_2(e, f, g, h)$. Alors,

$$\begin{aligned} |w_1 w_2|_E = |w_1|_E\,|w_2|_E &\iff ad = bc \text{ ou } eh = fg, \\ |w_1 w_2|_E > |w_1|_E\,|w_2|_E &\iff (ad > bc \text{ et } eh > fg) \text{ ou } (ad < bc \text{ et } eh < fg) \text{ et} \\ |w_1 w_2|_E < |w_1|_E\,|w_2|_E &\iff (ad < bc \text{ et } eh > fg) \text{ ou } (ad > bc \text{ et } eh < fg). \end{aligned}$$

Démonstration.
On a que

$$|w_1w_2|_E = \sqrt{(ae+dh-bf-cg)^2+(af+be-ch-dg)^2+(ag+ce-bh-df)^2+(ah+bg+cf+de)^2}$$

et

$$|w_1|_E\,|w_2|_E = \sqrt{(a^2+b^2+c^2+d^2)}\sqrt{(e^2+f^2+g^2+h^2)} = \sqrt{(a^2+b^2+c^2+d^2)(e^2+f^2+g^2+h^2)}.$$

De plus, $|w_1w_2|_E = |w_1|_E\,|w_2|_E$ si, et seulement si, $|w_1w_2|_E^2 = (|w_1|_E\,|w_2|_E)^2$, *i.e.*

$$\begin{aligned}&(ae+dh-bf-cg)^2+(af+be-ch-dg)^2+(ag+ce-bh-df)^2\\&+(ah+bg+cf+de)^2-(a^2+b^2+c^2+d^2)(e^2+f^2+g^2+h^2)=0.\end{aligned}\qquad (*)$$

Or,

$$\begin{aligned}(*) = {}& a^2e^2+aedh-aebf-aecg+dhae+d^2h^2-dhbf-dhcg-bfae-bfdh+b^2f^2+bfcg\\&-cgdh+cgbf+c^2g^2+a^2f^2+afbe-afch-afdg+beaf+b^2e^2-bech-bedg\\&-chaf-chbe+c^2h^2+chdg-dgaf-dgbe+dgch+d^2g^2+a^2g^2+agce-agbh\\&-agdf+ceag+c^2e^2-cebh-cedf-bhag-bhce+b^2h^2+bhdf-dfag-dfce+dfbh\\&+d^2f^2+a^2h^2+ahbg+ahcf+ahde+bgah+b^2g^2+bgcf+bfde+cfah+cfbg\\&+c^2f^2+cfde+deah+debg+decf+d^2e^2-a^2e^2-a^2f^2-a^2g^2-a^2h^2-b^2e^2\\&-b^2f^2-b^2g^2-b^2h^2-c^2e^2-c^2f^2-c^2g^2-d^2e^2-d^2f^2-d^2g^2-d^2h^2.\end{aligned}$$

Après simplification,

$$\begin{aligned}(*) &= 4adeh-4ehbc+4bcfg-4adfg\\&=4eh(ad-bc)+4fg(bc-ad)\\&=4(ad-bc)(eh-fg).\end{aligned}$$

Donc, $|w_1w_2|_E = |w_1|_E\,|w_2|_E$ si, et seulement si $ad=bc$ ou $eh=fg$. Le reste de la preuve se fait de la même façon avec $<$ et $>$. $\square$

Remarque 10. Si w_1 ou $w_2 \in \mathbb{C}$ ou $\mathbb{C}'$, alors $|w_1w_2|_E = |w_1|_E\,|w_2|_E$. ▲

Soit f une fonction qui va de $\mathbb{T}$ vers $\mathbb{T}$. Alors, cette fonction peut être écrite de la façon suivante :

$$\begin{aligned}f((x+y\mathbf{i}')+(z+q\mathbf{i}')\mathbf{i}) &= u_1(x,y,z,q)+\mathbf{i}'u_2(x,y,z,q)+\mathbf{i}u_3(x,y,z,q)+\mathbf{j}u_4(x,y,z,q)\\&=(u_1+u_2\mathbf{i}')+(u_3+u_4\mathbf{i}')\mathbf{i}\end{aligned}$$

avec u_1, u_2, u_3, $u_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Définition 7.2. Soit f une fonction définie sur un domaine $S \subset \mathbb{T}$ et w_0 un point d'adhérence à S. Alors, on dit que la limite de la fonction f lorsque $w \to w_0$ est L, *i.e.* $\lim\limits_{w \to w_0} f(w) = L$, si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $0 < |w - w_0|_E < \delta \Rightarrow |f(w) - L|_E < \varepsilon$.

De cette définition découle facilement :

1. l'unicité de la limite ;
2. pour $f, g : S \subset \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, si $\lim\limits_{w \to w_0} f(w)$ et $\lim\limits_{w \to w_0} g(w)$ existent, alors $\lim\limits_{w \to w_0} f(w) + g(w) = \lim\limits_{w \to w_0} f(w) + \lim\limits_{w \to w_0} g(w)$.

Aussi, d'autres normes mieux adaptées aux tétranombres sont possibles. Voici les deux autres qui seront le plus utilisées :

1. Celle généralisant la norme de $\mathbb{C}$: Soit $w = z_1 + z_2\mathbf{i} = (a+b\mathbf{i'}) + (c+d\mathbf{i'})\mathbf{i} = (a+c\mathbf{i}) + (b+d\mathbf{i})\mathbf{i'} = z_1' + z_2'\mathbf{i'}$. Alors $|w| = |z_1'| + |z_2'|$ est une norme sur $\mathbb{T}$ avec $|w_1 w_2| \leq |w_1||w_1|$ et $|z \cdot w| = |z||w|$ si $z \in \mathbb{C}$, *i.e.* généralise celle de $\mathbb{C}$.
2. Celle généralisant la norme de $\mathbb{C}'$ (la plus utile) : Soit $w = z_1 + z_2\mathbf{i} = (a + b\mathbf{i'}) + (c + d\mathbf{i'})\mathbf{i}$. alors, $|w|' = |z_1|' + |z_2|'$ est une norme dans $\mathbb{T}$ avec $|w_1 w_2|' \leq |w_1|'|w_2|'$ et $|z \cdot w|' = |z|'|w|'$ si $z \in \mathbb{C}'$, *i.e.* généralise celle de $\mathbb{C}'$.

Remarque 11. a) $\mathbb{T}$ muni de 1) et 2) est une algèbre de Banach. De plus, les trois normes présentées sont équivalentes, avec :

$$|w|_E \leq |w|,\ |w|_E \leq |w|'\ ,\ |w| \leq 2\,|w|_E \text{ et } |w|' \leq 2\,|w|_E\,(\Rightarrow |w_1 w_2|_E \leq 4\,|w_1|_E\,|w_2|_E).$$

Ainsi, les limites resteront les mêmes quelque soit la norme utilisée.

b) Si $z \in \mathbb{C} \Rightarrow |z|_E = |z|$ et si $z \in \mathbb{C}' \Rightarrow |z|_E = |z|'$. Ainsi, la norme euclidienne généralise la norme complexe et complexe prime.

▲

Beaucoup de propriétés sur le limites seront valides par le fait qu'avec les trois normes précédentes les tétranomvres deviennent un espace vectoriel normé et complet. Par contre, d'autres relatives à la multiplication seront prouvées à l'aide du faut qu'avec 1) et 2), les tétranombres deviennent une algèbre de Banach. Voici en particulier un de ces résultats :

Théorème 7.1. Soit f et g deux fonctions définies sur $S \subset \mathbb{T}$ vers $\mathbb{T}$. Si $\lim_{w \to w_0} f(w) = A$ et $\lim_{w \to w_0} g(w) = B$, alors

$$\lim_{w \to w_0} (fg)(w) = \left(\lim_{w \to w_0} f(w)\right)\left(\lim_{w \to 0} g(w)\right).$$

Démonstration.
On a que

$$\begin{aligned}|f(w)g(w) - AB|' &= |f(w)g(w) - f(w)B + f(w)B - AB|' \\ &= |f(w)g(w) - f(w)B|' + |f(w)B - AB|' \\ &\leq |f(w)|'|g(w) - B|' + |B||f(w) - A|'\end{aligned}$$

car c'est une algèbre de Banach. Or, $|f(w)|' - |A|' \leq |f(w) - A|'$. Ainsi, pour un $\varepsilon > 0$ donné, $\exists \delta > 0$ tel que $0 < |w - w_0|' < \delta \Rightarrow |f(w)|' \leq \varepsilon + |A|'$. C'est-à-dire que $|f(w)|'$ est borné pour $0 < |w - w_0|' < \delta$. Le reste de la preuve se déduit directement. $\square$

Chapitre

8 La notion de fonction $\mathbb{T}$-holomorphe

Dans ce chapitre, nous allons voir comment définir de façon légitime une notion de différentiabilité pour les tétranombres. Nous y définirons ainsi les concepts de fonction $\mathbb{T}$-différentiable et $\mathbb{T}$-holomorphe. De plus, nous y généraliserons les équations de Cauchy-Riemann dans le cas des tétranombres.

Définition 8.1. Soit f une fonction définie sur $S \subset \mathbb{T}$ vers $\mathbb{T}$. On dit que f est continue en $w_0 \in S$ (où w_0 est un point d'accumulation de S) si

$$\lim_{w \to w_0} f(w) = f(w_0).$$

Évidemment, on dit que f est continue si elle est continue en tout point du domaine de définition. On a aussi une équivalence évidente, *i.e.* f est continue si, et seulement si,

$$\lim_{h \to 0} f(w_0 + h) - f(w_0) = 0.$$

Aussi, on dit que $f : S \subset \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ est bornée si $\exists L > 0$ tel que $|f(w)|_E \leq L \forall w \in S$. De plus, grâce aux propriétés précédentes, il est évident que si f et $g : S \subset \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ sont continues en w_0, alors $(f+g)(w) = f(w) + g(w)$ et $(fg)(w) = f(w)g(w)$ sont aussi continues en w_0.

Nous sommes maintenant prêts à aborder la notion de différentiabilité. Partons du cas de la variable complexe standard. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (de $\mathbb{C}$) et $w_0 \in U$, alors $f(x + y\mathbf{i}) = u(x,y) + v(x,y)\mathbf{i}$ a une dérivée égale à $a + b\mathbf{i}$ en w_0 si, et seulement si, la fonction associée $F(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ est différentiable en w_0 dans le sens des variables réelles, avec comme dérivée une matrice (qui tient lieu de la transformation linéaire) de la forme suivante

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Ici, il est important de noter que $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ est la matrice représentant $a + b\mathbf{i}$ dans le cadre de l'isomorphie entre les matrices et les nombres complexes. Ce fait est d,uatant plus intéressant que dans le cadre des tétranombres, on a déjà trouvé la matrice représentant $a + b\mathbf{i}' + c\mathbf{i} + d\mathbf{j}$, celle-ci étant :

$$\begin{pmatrix} a & -b & -c & d \\ b & a & -d & -c \\ c & -d & a & -b \\ d & c & b & a \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons donc penser à une définition de différentiabilité dans le cadre des tétranombres et ce, sans se soucier des éléments non-inversibles.

Définition 8.2. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^4$ et $w_0 \in U$. Alors

$$f((x + y\mathbf{i}') + (z + q\mathbf{i}')\mathbf{i}) = u_1(x, y, z, q) + u_2(x, y, z, q)\mathbf{i}' + u_3(x, y, z, q)\mathbf{i} + u_4(x, y, z, q)\mathbf{j}$$

est dit $\mathbb{T}$-différentiable en w_0 avec comme dérivée $(a + b\mathbf{i}') + (c + d\mathbf{i}')\mathbf{i}$ si la fonction associée

$$F(x, y, z, q) = (u_1(x, y, z, q), u_2(x, y, z, q), u_3(x, y, z, q), u_4(x, y, z, q))$$

est différentiable dans le sens des variables réelles en w_0, avec comme dérivée la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} a & -b & -c & d \\ b & a & -d & -c \\ c & -d & a & -b \\ d & c & b & a \end{pmatrix}.$$

De plus, nous dirons qu'une fonction $f : U \subset \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ est $\mathbb{T}$-différentiable sur U si elle l'est en tout point de U.

Mais, la définition 8.2 n'est pas suffisante pour bien travailler, c'est pourquoi nous devons y trouver un équivalent se servant plus des tétranombres.

Proposition 8.1. Soit U un ouvert $\mathbb{T}$ et $w_0 \in U$. Alors

$$f((x + y\mathbf{i}') + (z + q\mathbf{i}')\mathbf{i}) = u_1(x, y, z, q) + u_2(x, y, z, q) + u_3(x, y, z, q) + u_4(x, y, z, q)$$

est $\mathbb{T}$-différentiable en w_0 avec comme dérivée $(a + b\mathbf{i}') + (c + d\mathbf{i}')\mathbf{i}$ si on peut écrire :

$$f(w_0 + h) = f(w_0) + ((a + b\mathbf{i}') + (c + \mathbf{i}')\mathbf{i}) \cdot hR(w_0, h)$$

où

$$\lim_{h\to 0} \frac{|R(w_0, h)|_E}{|h|_E} = 0,\ h = (h_1 + h_2 bp) + (h_3 + h_4\mathbf{i}')\mathbf{i}.$$

Démonstration.
Tout d'abord, assumons que f est $\mathbb{T}$-différentiable dans le sens de la définition 8.2. Alors, sa fonction associée sera $F : U \subset \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ et

$$Df(w_0) = \begin{pmatrix} a & -b & -c & d \\ b & a & -d & -c \\ c & -d & a & -b \\ d & c & b & a \end{pmatrix}.$$

Comme F est différentiabilité en w_0, F peut s'écrire de la manière suivante :

$$F(w_0 + h) = F(w_0) + DF(w_0)(h) + R')w_0, h)$$

où $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{|R'(w_0, h)|_E}{|h|_E} = 0$. Posons

$$R'(w_0, h) = (\varepsilon_1(w_0, h), \varepsilon_2(w_0, h), \varepsilon_3(w_0, h), \varepsilon_4(w_0, h)) \text{ et } h = (h_1, h_2, h_3, h_4).$$

Ainsi, nous obtenons termes à termes :

$$\begin{aligned} u_1(w_0 + h) &= u_1(w_0) + (ah_1 - bh_2 - ch_3 + dh_4) + \varepsilon_1(w_0, h) \\ u_2(w_0 + h) &= u_2(w_0) + (bh_1 + ah_2 - dh_3 - ch_4) + \varepsilon_2(w_0, h) \\ u_3(w_0 + h) &= u_3(w_0) + (ch_1 - dh_2 + ah_3 - bh_4) + \varepsilon_3(w_0, h) \text{ et} \\ u_4(w_0 + h) &= u_4(w_0) + (dh_1 + ch_2 + bh_3 + ah_4) + \varepsilon_4(w_0, h). \end{aligned}$$

De plus, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{|\varepsilon_k|_E}{|h|_E} = 0$ pour $k = 1, 2, 3, 4$. Ceci revient à écrire

$$f(w_0 + h) = f(w_0) + ((a + b\mathbf{i}') + (c + d\mathbf{i}')\mathbf{i})((h_1 + h_2\mathbf{i}') + (h_3 + h_4\mathbf{i}')\mathbf{i}) + R(w_0, h)$$

où

$$\lim_{h\to 0} \frac{|R(w_0, h)|_E}{|h|_E} = 0 \text{ et } R(w_0, h) = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2\mathbf{i}') + (\varepsilon_3 + \varepsilon_4\mathbf{i}')\mathbf{i}.$$

Ce qui démontre le premier côté de l'équivalence, l'autre côté se fait de façon équivalente. $\square$

Proposition 8.2. Soit f définie sur U (ouvert) $\subset \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ et $\mathbb{T}$-différentiable en $w_0 \in U$. Alors f est continue en w_0.

Démonstration.
Si f est $\mathbb{T}$-différentiable, alors sa fonction associée F sera différentiable. Or, il est déjà établi que si une fonction qui va de $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ est différentiable en un w_0, alors elle est aussi continue en ce w_0. Ainsi, il est évident que f sera aussi continue en w_0. $\square$

Proposition 8.3. Si la dérivée de f existe, alors elle est unique.

Démonstration.
Nous savons déjà que la dérivée (matrice) de la fonction associée F est unique. Ainsi, il est évident que la dérivée de f sera aussi unique. $\square$

Proposition 8.4. Soit f et g définies sur U (ouvert) $\subset \mathbb{T}$ vers $\mathbb{T}$ et $\mathbb{T}$-différentiable en $w_0 \in U$ avec $f'(w_0) = a$ et $g'(w_0) = b$. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors $\alpha f + \beta g$ sera aussi une fonction différentiable en w_0 et la dérivée sera $\alpha a + \beta b$, *i.e.* $(\alpha f + \beta g)'(w_0) = \alpha f'(w_0) + \beta g'(w_0)$.

Démonstration.
Encore une fois, la preuve est évidente, car la fonction associée a cette propriété. Il faut tout de même préciser que dans le cas de $\alpha F + \beta G$, la dérivée est $\alpha DF(w_0) + \beta DG(w_0)$ et que cette matrice a les symétries voulues pour affirmer que cette fonction est $\mathbb{T}$-différentiable. Et donc $(\alpha f + \beta g)'(w_0) = \alpha f'(w_0) + \beta g'(w_0)$. $\square$

Proposition 8.5. Soit f et g définies sur U (ouvert)$\subset \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ et $\mathbb{T}$-différentiables en $w_0 \in U$, avec $f'(w_0) = a$ et $g'(w_0) = b$. Alors, $(fg)(w)$ est différentiable en w_0 et la dérivée est $f(w_0)b + g(w_0)a$, *i.e.* $(fg)'(w_0) = f(w_0)g'(w_0) + g(w_0)f'(w_0)$.

Démonstration.
Comme f et g sont $\mathbb{T}$-différentiables, cela implique que :

$$f(w_0 + h) = f(w_0) + ah + R_1(w_0, h)$$

et

$$g(w_0 + h) = g(w_0) + bh + R_2(w_0, h)$$

où $\lim_{h\to 0} \frac{|R_k(w_0,h)|_E}{|h|_E} = 0$ pour $k = 1, 2$.

Donc,

$$\begin{aligned} f(w_0+h)g(w_0+h) =&(fg)(w_0+h)\\ =&f(w_0)g(w_0) + f(w_0)bh + f(w_0)R_2(w_0,h) + ahg(w_0) + ahbh + ahR_2(w_0,h)\\ &+ R_1(w_0,h)g(w_0) + R_1(w_0,h)bh + R_1(w_0,h)R_2(w_0,h), \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} f(w_0+h)g(w_0+h) =&(fg)(w_0) + (f(w_0)b + g(w_0)a)h + \Big[f(w_0)R_2(w_0,h) + abh^2 + R_1(w_0,h)g(w_0)\\ &+ R_1(w_0,h)g(w_0)bh + R_1(w_0,h)R_2(w_0,h) + ahR_2(w_0,h)\Big]. \end{aligned}$$

Il faut montrer que le reste entre crochet tend vers zéro. Or

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{|f(w_0)R_2 + abh^2 + R_1g(w_0) + R_1bh + R_1R_2 + ahR_2|_E}{|h|_E} \leq& \frac{|f(w_0)R_2|_E}{|h|_E} + \frac{|abh^2|_E}{|h|_E} + \frac{|R_1g(w_0)|_E}{|h|_E}\\ & \frac{|R_1bh|_E}{|h|_E} + \frac{|R_1R_2|_E}{|h|_E} + \frac{|ahR_2|_E}{|h|_E}. \end{aligned}$$

De plus,

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(w_0)\cdot R_2|_E}{|h|_E} = \lim_{h\to 0} \left| f(w_0)\cdot \frac{R_2}{|h|_E} \right|_E$$

et comme

$$\lim_{h\to 0} \frac{R_2}{|h|_E} = 0 \text{ et } \lim_{h\to 0} f(w_0) = f(w_0),$$

cela implique que $\lim_{h\to 0} f(w_0)\cdot \frac{R_2}{|h|_E} = 0$. Donc,

$$\lim_{h\to 0} \left| f(w_0)\cdot \frac{R_2}{|h|_E} \right|_E = 0.$$

De la même façon, on déduit que

$$\lim_{h\to 0} \frac{|R_1\cdot g(w_0)|_E}{|h|_E} = 0.$$

Aussi,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\left|abh^h\right|_E}{|h|_E} = \lim_{h\to 0} \left| abh\cdot \frac{h}{|h|_E} \right|_E.$$

Or, pour un $0 < |h|_E < \delta$, on a que (par équivalence des normes) :

$$\left| abh\cdot \frac{h}{|h|_E} \right|_E \leq |abh\cdot \frac{h}{|h|_E}|' \leq |abh|'|\frac{h}{|h|_E}|' \leq 4\,|abh|_E \left| \frac{h}{|h|_E} \right|_E \leq 4\,|abh|_E \to 0.$$

On a aussi que

$$\lim_{h\to 0}\frac{|R_1\cdot bh|_E}{|h|_E}=\lim_{h\to 0}\left|\frac{R_1}{|h|_E}\cdot bh\right|_E=0$$

et que

$$\lim_{h\to 0}\frac{|ab\cdot R_2|_E}{|h|_E}=0.$$

Finalement

$$\lim_{h\to 0}\frac{|R_1\cdot R_2|_E}{|h|_E}=\lim_{h\to 0}\left|R_1\cdot\frac{R_2}{|h|_E}\right|_E=0,$$

car $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|R_1|_E}{|h|_E}=0$ implique que $\lim_{h\to 0}|R_1|_E=0$ et donc $lim_{h\to 0}\dfrac{|R_1\cdot R_2|_E}{|h|_E}=0$.

Cette dernière limite étant égale à zéro, ceci est suffisant pour démontrer que la limite du reste est zéro. Et donc, $(fg)'(w_0)=f(w_0)g'(w_0)+g(w_0)f'(w_0)$. □

Proposition 8.6. Soit $f:U(\text{ouvert})\ \subset\mathbb{T}\to\mathbb{T}$, $\mathbb{T}$-différentiable en $w_0\in U$ et $g:V(\text{ouvert})\ \subset\mathbb{T}\to\mathbb{T}$, $\mathbb{T}$-différentiable en $t=f(w_0)\in V$. Alors, la fonction $g\circ f:U\subset\mathbb{T}\to\mathbb{T}$ est $\mathbb{T}$-différentiable en w_0 et $(g\circ f)'(w_0)=g'((f(w_0))f'(w_0)$.

Démonstration.

Ceci découle directement du fait que la règle de la chaîne à la fonction associée $G\circ F$. De plus la dérivée (matrice) de celle-ci est $D(G\circ F)(w_0)=DF(F(w_0))\cdot DF(w_0)$, ce qui est suffisant pour affirmer que $(g\circ f)'(w_0)=g'(f(w_0))f'(w_0)$. □

Abordons maintenant la généralisation des équations de Cauchy-Riemann.

Proposition 8.7. Soit f définie sur $U(\text{ouvert})\ \subset\mathbb{T}\to\mathbb{T}$ avec $f=u_1+u_2\mathbf{i}'+u_3\mathbf{i}+u_4\mathbf{j}$ et $F(x,y,z,q)=*u_1,u_2,u_3,u_4)$ où u_k définie sur $U\subset\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$ pour $k=1,2,3,4$. Si toutes les dérivées partielles de u_1,u_2,u_3 et u_4 existent et sont continues dans U (*i.e.* $f\in C^1(U)$) et si le système d'égalité suivant est satisfait :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial x}=\frac{\partial u_2}{\partial y}=\frac{\partial u_3}{\partial z}=\frac{\partial u_4}{\partial q},\\ -\frac{\partial u_1}{\partial y}=\frac{\partial u_2}{\partial x}=-\frac{\partial u_3}{\partial q}=\frac{\partial u_4}{\partial z},\\ -\frac{\partial u_1}{\partial z}=-\frac{\partial u_2}{\partial q}=\frac{\partial u_3}{\partial x}=\frac{\partial u_4}{\partial y},\end{aligned}\tag{8.1}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial q}=-\frac{\partial u_2}{\partial z}=-\frac{\partial u_3}{\partial y}=\frac{\partial u_4}{\partial x}\text{ en un }w_0\in U\tag{**}$$

alors la fonction f est $\mathbb{T}$-différentiable en w_0 et sa dérivée est donnée par :

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial x}\mathbf{i'} + \frac{\partial u_3}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u_4}{\partial x}\mathbf{j}.$$

Démonstration.

Comme les édrivées partielles existent et sont continues dnas l'ouvert U, la fonction F est dérivable dans le sens réel du termne. Mais de plus le système d'égalité implique aussi que la dérivée (matrice) a les symétries voulues pour que f soit dite $\mathbb{T}$-différentiable en w_0. ☐

Remarque 12. a) Une conséquence directe de la définition 8.2 est que lorsque $f : U(\text{ouvert}) \subset \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ est $\mathbb{T}$-différentiable en un $w_0 \in U$, alors le système d'égalité $**$ (58) est satisfait.

b) Pour $z_1 = x + y\mathbf{i'}$ et $z_2 = z + q\mathbf{i'}$, on a que

$$x = \frac{z_1 + \overline{z_1}}{2},\ y = \frac{z_1 - \overline{z_1}}{2},\ z = \frac{z_2 + \overline{z_2}}{2} \text{ et } q = \frac{z_2 - \overline{z_2}}{2}.$$

Donc, $f(x, y, z, q)$ peut être exprimée en toute généralité comme fonction de z_1, $\overline{z_1}$, z_2 et $\overline{z_2}$.

c) Dans le cas où $f \in C^1(U)$, on peut définir

$$\frac{\partial}{\partial z_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\mathbf{i'}}\frac{\partial}{\partial y}\right),\ \frac{\partial}{\partial \overline{z_1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{\mathbf{i'}}\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

et des définitions analogues pour z_2 avec z et q.

▲

Définition 8.3. Soit $f : U \subset \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ avec U ouvert. Alors, on dit que f est $\mathbb{T}$-holomorphe sur U si elle est $\mathbb{T}$-différentiable en tout point de U.

Théorème 8.1. Soit $f : U(\text{ouvert}) \subset \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ tel que $f \in C^1(U)$. Posons $f(w) = w_1(x, y, z, q) + w_2(x, y, z, q)\mathbf{i}$ où

$$w_1(x, y, z, q) = u_1(x, y, z, q) + u_2(x, y, z, q)\mathbf{i'}$$
$$w_2(x, y, z, q) = u_3(x, y, z, q) + u_4(x, y, z, q)\mathbf{i'}.$$

Alors f est $\mathbb{T}$-holomorphe sur U si, et seulement si,

1) $\dfrac{\partial w_1}{\partial \overline{z_1}} = \dfrac{\partial w_1}{\partial \overline{z_2}} = \dfrac{\partial w_2}{\partial \overline{z_1}} = \dfrac{\partial w_2}{\partial \overline{z_2}} = 0$ et ;

2) $\dfrac{\partial w_1}{\partial z_1} = \dfrac{\partial w_2}{\partial z_2}$ et $\dfrac{\partial w_2}{\partial z_1} = -\dfrac{\partial w_1}{\partial z_2}$ sur U.

De plus, $f'(w) = \frac{\partial w_1}{\partial z_1} + \frac{\partial w_2}{\partial z_1}\mathbf{i}$ pour $w \in U$.

Démonstration.
Dans un premier temps, il faut remarquer les équivalences suivantes (pour un $w_0 \in U$) :

a) $\frac{\partial w_1}{\partial \overline{z_1}} = 0 \iff \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial y}$ et $\frac{\partial u_1}{\partial y} = -\frac{\partial u_2}{\partial x}$; $\frac{\partial w_1}{\partial z_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial x}\mathbf{i}'$.

b) $\frac{\partial w_1}{\partial \overline{z_2}} = 0 \iff \frac{\partial u_1}{\partial z} = \frac{\partial u_2}{\partial q}$ et $\frac{\partial u_1}{\partial q} = -\frac{\partial u_2}{\partial z}$; $\frac{\partial w_1}{\partial z_2} = \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_2}{\partial z}\mathbf{i}'$.

c) $\frac{\partial w_2}{\partial \overline{z_1}} = 0 \iff \frac{\partial u_3}{\partial x} = \frac{\partial u_4}{\partial y}$ et $\frac{\partial u3}{\partial y} = -\frac{\partial u_4}{\partial x}$; $\frac{\partial w_2}{\partial z_1} = \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_4}{\partial x}\mathbf{i}'$.

d) $\frac{\partial w_2}{\partial \overline{z_2}} = 0 \iff \frac{\partial u_3}{\partial z} = \frac{\partial u_4}{\partial q}$ et $\frac{\partial u_3}{\partial q} = -\frac{\partial u_4}{\partial z}$; $\frac{\partial w_2}{\partial z_2} = \frac{\partial u_3}{\partial z} + \frac{\partial u_4}{\partial z}\mathbf{i}'$.

On vérifie ainsi que 1) et 2) sont satisfaits si, et seulement si, le système d'égalité $**$ de la page 58 est satisfait en w_0, ce qui est aussi équivalent à ce que f soit $\mathbb{T}$-différentiable en w_0. Notons que ces équivalences sont vraies pour un $w_0 \in U$ arbitraire et $f \in C^1(U)$. □

La suite de ce chapitre se veut une petite exploration pratique des conséquences de ce qui a été fait jusqu'à maintenant.

Proposition 8.8. La fonction e^w est $\mathbb{T}$-différentiable $\forall w \in \mathbb{T}$ et $\frac{\mathrm{d}(e^w)}{\mathrm{d}w} = e^w$.

Démonstration.
Soit $w = z_1 + z_2\mathbf{i}$ avec $z_1, z_2 \in \mathbb{C}'$. Ainsi,

$$\begin{aligned} e^w =& e^{z_1}\left[\cos(z_2) + \mathbf{i}\sin(z_2)\right] \\ =& e^{z_1}\cos(z_2) + e^{z_1}\sin(z_2)\mathbf{i} \\ =& w_1(z_1, z_2) + w_2(z_1, z_2). \end{aligned}$$

Dans le chapitre 4, l'exponentielle y est écrite explicitement comme fonction de $\mathbb{R}^4$ et il y est clair que $e^w \in C^1(\mathbb{R}^4)$. Aussi, w_1 et w_2 sont clairement des fonctions partiellement holomorphes de z_1 et z_2. Ce qui implique que $\dfrac{\partial w_1}{\partial \overline{z_1}} = \dfrac{\partial w_1}{\partial \overline{z_2}} = \dfrac{\partial w_2}{\partial \overline{z_1}} = \dfrac{\partial w_2}{\partial \overline{z_2}} = 0$.

Or,

$$\frac{\partial w_1}{\partial z_1} = e^{z_1}\cos(z_2) = \frac{\partial w_2}{\partial z_2} \text{ et } \frac{\partial w_2}{\partial z_1} = e^{z_1}\sin(z_2) = -\frac{\partial w_1}{\partial z_2}.$$

On a donc que

$$\frac{\partial w_1}{\partial z_1} = \frac{\partial w_2}{\partial z_2} \text{ et } \frac{\partial w_2}{\partial z_1} = -\frac{\partial w_1}{\partial z_2}.$$

Ainsi e^w est $\mathbb{T}$-holomorphe sur mT. De plus,

$$\frac{\mathrm{d}(e^w)}{\mathrm{d}w} = \frac{\partial w_1}{\partial z_1} + \frac{\partial w_2}{\partial z_1} = e^{z_1}\cos(z_2) + e^{z_1}\sin(z_2)\mathbf{i} = e^w \quad \forall w \in \mathbb{T}.$$

□

Proposition 8.9. On a que $\dfrac{\mathrm{d}(e^w)}{\mathrm{d}w} = ae^{aw}$ où $a \in \mathbb{T}$.

Démonstration.
Posons $P = aw$, alors

$$\frac{\mathrm{d}(e^{aw})}{\mathrm{d}w} = \frac{\mathrm{d}(w^P)}{\mathrm{d}w} = \left(\frac{\mathrm{d}(e^p)}{\mathrm{d}P}\right) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}(P)}{\mathrm{d}w}\right) = e^P a = ae^{aw}$$

par la règle de dérivation en chaîne. □

Proposition 8.10. On a que $\frac{\mathrm{d}(sin(w))}{\mathrm{d}w} = \cos(w)$ et $\frac{\mathrm{d}(cos(w))}{\mathrm{d}w} = -\sin(w)$, $\forall w \in \mathbb{T}$.

Démonstration.
Découle directement de la définition du sinus, du cosinus, ainsi que de la proposition 8.9. □

Proposition 8.11. On a que $\frac{\mathrm{d}(w^n)}{\mathrm{d}w} = nw^{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 1$.

Démonstration.
Procédons par induction sur n. Pour $n = 1$, $w^n = w$ et

$$\frac{\mathrm{d}(w)}{\mathrm{d}w} = 1 = 1 \cdot w^0 = 1 \cdot 1 = 1 = 1.$$

Supposons la proposition vraie pour $n - 1$, *i.e.*

$$\frac{\mathrm{d}(w^{n-1})}{\mathrm{d}w} = (n-1)e^{n-2}.$$

Alors,

$$\frac{\mathrm{d}(w^n)}{\mathrm{d}w} = \frac{\mathrm{d}(w \cdot w^{n-1})}{\mathrm{d}w} = \frac{\mathrm{d}(w^{n-1})}{\mathrm{d}w} \cdot w + w^{n-1} = (n-1)w^{n-1} + w^{n-1} = nw^{n-1}.$$

□

Chapitre

9 La $\mathbb{T}$-différentiabilité par limite

Ce chapitre traitera de la notion de fonction $\mathbb{T}$-différentiable par limite, ainsi que de la relation entre les fonctions $\mathbb{T}$-holomorphes et les fonctions holomorphes dans $\mathbb{C}'^2$. De plus, on verra des notations permettant d'exprimer clairement la notion de $\mathbb{T}$-holomorphie.

Définition 9.1. Soit $f : U(\text{ouvert}) \subset \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ avec $w_0 \in U$. Alors, on dit que f est $\mathbb{T}$-différentiable par limite en w_0 si :

1. $\displaystyle\lim_{\substack{h\to 0\\ (\text{inv})}} \frac{f(w_0+h)-f(w_0)}{h} = \tilde{f}(w_0)$ existe,
   i.e. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $\forall h \in \mathbb{T}$ inversible, avec $|h|_E < \delta$,
   $$\Rightarrow \left| \frac{f(w_0+h)-f(w_0)}{h} - \tilde{f}(w_0) \right|_E < \varepsilon.$$
2. f est continue sur U.

Remarques 2.
1. L'ensemble des éléments non-inversibles, *i.e.*
   $$\{(u,v,-v,u) : u,v \in \mathbb{R}\} \cup \{(u,v,v,-u) : u,v \in \mathbb{R}\}$$
   est un ensemble fermé et maigre (ainsi l'ensemble est négligeable).
2. Tout élément $w \in \mathbb{T}$ est un point d'accumulation d'éléments inversibles.

▲

Proposition 9.1. Soit $f : U(\text{ouvert}) \subset \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ avec $w_0 \in U$. Si f est $\mathbb{T}$-différentiable par limite en w_0, alors f est $\mathbb{T}$-différentiable en w_0 avec $f'(w_0) = \tilde{f}(w_0)$.

Démonstration.
Comme f est $\mathbb{T}$-différentiable par limite en w_0, alors il existe un ouvert autour de w_0 où :

$$f(w_0 + h) - f(w_0) = \tilde{f}(w_0)h + \Psi(h)h$$

tel que

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ (\text{inv.})}} \Psi(h) = 0. \tag{$*$}$$

On constate que $\Psi(h)$ n'est définie que pour les éléments inversibles de cet ouvert. Par contre, comme f est continue en w_0, on peut écrire :

$$f(w_0 + h) - f(w_0) = \tilde{f}(w_0)h + V(h)$$

où $V(h) = \Psi(h)h$ pour les h inversibles et V est continue dans un voisinage autour de 0.

D'un autre côté, nous avons déjà démontré que f est $\mathbb{T}$-différentiable en w_0 avec comme dérivée $f'(w_0)$ si, et seulement si, on peut écrire :

$$f(w_0 + h) - f(w_0) = f'(w_0)h + \Phi(h)$$

où $\lim_{h\to 0} \frac{|\Phi(h)|_E}{|h|_E} = 0$. Comme la dérivée est unique, il suffit donc de montrer que $\lim_{h\to 0} \frac{|V(h)|_E}{|h|_E} = 0$.

Commençons par montrer que $\lim_{\substack{h\to 0\\ (\text{inv})}} \frac{|V(h)|_E}{|h|_E} = 0$, *i.e.* $\lim_{\substack{h\to 0\\ (\text{inv})}} \frac{|\Psi(h)|_E}{|h|_E} = 0$.

Or,

$$\frac{|\Psi(h)|_E}{|h|_E} \leq \frac{|\Psi(h)h|'}{|h|_E} \leq \frac{|\Psi|'|h|'}{|h|_E} \leq 4\frac{|\Psi(h)|_E\,|h|_E}{|h|_E} = 4\,|\Psi h|_E \to 0$$

pour des h inversibles. Ce qui implique que

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ (\text{inv})}} \frac{|\Psi(h)h|_E}{|h|_E} = 0.$$

Ainsi, pour un $\varepsilon > 0$ choisi, $\exists\delta > 0$ tel que pour $|h|_E < \delta$ (avec h inversible), on a que $\frac{|\Psi(h)h|_E}{|h|_E} < \varepsilon$. Prenons maintenant un h non-inversible tel que $0 < |h|_E < \delta$. Il est toujours possible de trouver une suite $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ d'éléments inversibles tel que $h_n \to h$ et $|h_n|_E < \delta$ avec $h_n \neq h$ $\forall n$. Comme V est continue, cela implique que $V(h_n) \to V(h)$. Donc, $|V(h_n)|_E \to |V(h)|_E$ et $|h_n|_E \to |h|_E$.

Ainsi,

$$\frac{|\Psi(h_n)h_n|_E}{|h_n|_E} \to \frac{|V(h)|_E}{|h|_E}.$$

Ce qui implique que $\frac{|V(h)|_E}{|h|_E} \leq \varepsilon$. Donc

$$\lim_{h\to 0} \frac{|V(h)|_E}{|h|_E} = 0.$$

Ceci complète la démonstration. $\square$

Proposition 9.2. Soit $f : U \subset \mathbb{C}'^2 \to \mathbb{C}'^2$ où U est un ouvert de $\mathbb{T} \cong \mathbb{C}'^2$, $f \in C^1(U)$ et f $\mathbb{T}$-holomorphe dans U où $f(z_1, z_2) = (w_1(z_1, z_2), w_2(z_1, z_2))$, $w_i : \mathbb{C}' \times \mathbb{C}' \to \mathbb{C}'$ pour $i = 1, 2$. Alors, w_1 et w_2 sont holomorphes sur U dans le sens de $\mathbb{C}^2$, ici $\mathbb{C}'^2$.

Démonstration.
Par le théorème 8.1, le fait que $f = w_1 + w_2\mathbf{i}$ soit $C^1(U)$ et $\mathbb{T}$-holomorphe implique que $\frac{\partial w_i}{\partial \overline{z}_j} = 0$ pour $1 \leq i, j \leq 2$ sur U. Donc, w_1 et w_2 sont holomorphes sur U. $\square$

Définition 9.2. Pour $f : U(\text{ouvert}) \subset \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ tel que $f \in C^1(U)$, notons :

$$\frac{\partial}{\partial w} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{1}{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial z_2}\right), \; \frac{\partial}{\partial \overline{w}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{1}{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial z_2}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{\mathbf{i}'}\frac{\partial}{\partial y_j}\right) \text{ et } \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{1}{\mathbf{i}'}\frac{\partial}{\partial y_j}\right)$$

pour $j = 1, 2$.

Alors par calcul direct, on constate que sous les conditions de la définition 9.2 :

1) f $\mathbb{T}$-holomorphe sur U implique que $\frac{\partial f}{\partial w} = f'$ sur U,
2) $\frac{\partial f}{\partial \overline{w}} = 0$ sur U si, et seulement si, $\frac{\partial w_1}{\partial z_1} = \frac{\partial w_2}{\partial z_2}$ et $\frac{\partial w_2}{\partial z_1} = -\frac{\partial w_1}{\partial z_2}$ sur U.

En résumé, f est $\mathbb{T}$-holomorphe sur U si, et seulement si, $\frac{\partial w_i}{\partial \overline{z}_j} = 0$ pour $1 \leq i, j \leq 2$ et $\frac{\partial f}{\partial \overline{w}} = 0$. De plus, la dérivée de $f' = \frac{\partial f}{\partial w}$ sur U.

Chapitre

10 Développement en série

Dans ce chapitre, on verra la généralisation du développement en série de Taylor pour les tétranombres et un théorème sur le rayon de convergence.

Théorème 10.1. Soit $f : U(\text{ouvert}) \subset \mathbb{C}'^2 \to \mathbb{C}'^2$ tel que $f \in C^1(U)$. Si f est $\mathbb{T}$-holomorphe sur U alors $f^{(n)}$ existe $\forall n \in \mathbb{N}$, *i.e.* que toutes les dérivées de f sont $\mathbb{T}$-holomorphes.

Démonstration.
La fonction f est de la forme $f(z_1, z_2) = w_1(z_1, z_2) + w_2(z_1, z_2)\mathbf{i}$ où $w_i : U \subset \mathbb{C}' \times \mathbb{C}' \to \mathbb{C}'$, $i = 1, 2$ sont holomorphes dans le sens de $\mathbb{C}'^2$. En fait, $\frac{\partial w_i}{\partial \bar{z}_j} = 0$ pour $1 \leq i, j \leq 2$ et

$$\frac{\partial w_1}{\partial z_1} = \frac{\partial w_2}{\partial z_2}, \frac{\partial w_2}{\partial z_1} = -\frac{\partial w_1}{\partial z_2}. \tag{$*$}$$

De plus,

$$f' = \frac{\partial w_1}{\partial z_1} + \frac{\partial w_2}{\partial z_1}\mathbf{i} \text{ sur } U.$$

Comme w_1 et w_2 sont holomorphes sur U, alors $\frac{\partial w_i}{\partial z_j}$ $(1 \leq i, j \leq 2)$ restent holomorphes sur U, ce qui implique que $f' \in C^1(U)$ et $\dfrac{\partial\partial\left(\frac{\partial w_i}{\partial z_1}\right)}{\partial \overline{z_j}} = 0$ pour $1 \leq i, j \leq 2$. Aussi, $\frac{\partial^2 w_i}{\partial z_j \partial z_k}$ existe pour $1 \leq i, j, k \leq 2$ et $\frac{\partial^2 w_i}{\partial z_j \partial z_k} = \frac{\partial^2 w_i}{\partial z_k \partial z_j}$ pour $1 \leq i, j, k \leq 2$.

Ainsi, de $(*)$, on peut déduire que

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial z_1^2} = \frac{\partial^2 w_2}{\partial z_1 \partial z_2} = \frac{\partial^2 w_2}{\partial z_2 \partial z_1} \text{ et } \frac{\partial^2 w_2}{\partial z_1^2} = -\frac{\partial^2 w_1}{\partial z_1 \partial z_2} = -\frac{\partial^2 w_1}{\partial z_2 \partial z_1}.$$

Donc, f' est $\mathbb{T}$-holomorphe sur U. On refait le même raisonnement à partir de f', et ainsi de suite, pour obtenir le théorème. $\square$

Évidemment, ce résultat nous incite à se demander si un développement en série d'une fonction $\mathbb{T}$-holomorphe est possible.

Théorème 10.2. Soit $f : U(\text{ouvert}) \subset \mathbb{C}'^2 \to \mathbb{C}'^2$ tel que $f \in C^1(U)$. Si f est $\mathbb{T}$-holomorphe sur U, alors $\forall w_0 \in U$ il existe une boule B_{w_0} tel que

$$\forall w \in B_{w_0},\ f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(w_0)}{n!}(w - w_0)^n \tag{\#1}$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{f^{(n)}}{n!} \right|' (|w - w_0|')^n \text{ converge.} \tag{\#2}$$

Démonstration.

Preuve de (#1).

En premier lieu, remarquons que par le théorème $*$, $f^{(n)}$ existe $\forall n \in \mathbb{N}$. De plus, par la proposition 9.2, $f = f_1 + \mathbf{i} f_2$ où $f_i : U \subset \mathbb{C}'^2 \to \mathbb{C}'$ est holomorphe pour $i = 1, 2$. Ce qui implique que $\forall w_0 \in U$, il existe une boule B_{w_0} tel que $f_i(w) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^i (w - w_0)^\nu$ pour $i = 1, 2$ où

$$(w - w_0)^\nu = (w_1 - w_1^0)^{\nu_1}(w_2 - w_2^0)^{\nu_2}$$

et

$$a^i_{\nu_1\nu_2} = \frac{1}{\nu_1\nu_2} \frac{\partial^{\nu_1+\nu_2} f_i(w_0)}{\partial z_1^{\nu_1} \partial z_2^{\nu_2}} \text{ pour } i = 1, 2.$$

Ainsi, une grande partie du travail a déjà été fait. Remarquons aussi que

$$w^n = (w_1 + \mathbf{i} w_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} w_1^k (\mathbf{i} w_2)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} w_1^k w_2^{n-k} \mathbf{i}^{n-k}.$$

Maintenant, en posant

$$a_n = \frac{f^{(n)}(w_0)}{n!} = \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n f_1}{\partial z_1^n} + \frac{\partial^n f_2}{\partial z_1^n} \right),$$

on obtient que

$$\begin{aligned}
a_n(w - w_0)^n = \frac{f^{(n)}(w_0)}{n!} \cdot (w - w_0)^n &= \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n f_1}{\partial z_1^n} + \mathbf{i} \frac{\partial^n f_2}{\partial z_1^n} \right) \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} (w_1 - w_1^0)^k (w_2 - w_2^0)^{n-k} \mathbf{i}^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbf{i}^{n-k} \left[\frac{1}{k!(n-k)!} \frac{\partial^n f_1}{\partial z_1^n} (w_1 - w_1^0)^k (w_2 - w_2^0)^{n-k} \right. \\
&\left. + \mathbf{i} \frac{1}{k!(n-k)!} \frac{\partial^n f_2}{\partial z_1^n} (w_1 - w_1^0)(w_2 - w_2^0)^{n-k} \right].
\end{aligned}$$

De plus comme f est $\mathbb{T}$-holomorphe, cela implique que

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial z_1^2} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial z_1 \partial z_2} \text{ et } \frac{\partial^2 f_2}{\partial z_1^2} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial z_1 \partial z_2}.$$

Donc,

$$\frac{\partial^k f_1}{\partial z_1^k} = \frac{\partial^k f_2}{\partial z_1^{k-1} \partial z_2} \text{ et } \frac{\partial^k f_2}{\partial z_1^k} = -\frac{\partial^k f_1}{\partial z_1^{k-1} \partial z_2}. \tag{α}$$

Nous auront besoin, pour continuer, des deux petits lemmes suivants :

Lemme 10.1. Sous les conditions du théorème α,

$$\frac{\partial^n f_1}{\partial z_1^n} = h(n,k) \frac{\partial^n f_{p(n,k)}}{\partial z_1^k \partial z_2^{n-k}} \text{ lorsque } n > 0 \text{ et } 0 \leq k \leq n$$

où $p(n,k) = 1$ si $n-k$ est pair (ou zéro) et $p(n,k) = 2$ si $n-k$ est impair, ainsi que $h(n,k) = \Re\mathrm{e}\,(\mathbf{i}^{n-k})$ si $n-k$ est pair (ou zéro) et $h(n,k) = \Im\mathrm{m}\,(\mathbf{i}^{n-k})$ si $n-k$ est impair.

Démonstration (Par le principe de d'induction fini)**.**
Soit $n > 0$ fixé et $0 \leq k \leq n$. Posons $L = n-k$, ainsi notre hypothèse devient :

$$\frac{\partial^n f_1}{\partial z_1^n} = h(L) \frac{n}{f_{p(L)}} n - L z_1 L z_2 \tag{$*$}$$

pour $0 \leq L \leq n$.

Il est évident que l'hypothèse est vraie pour $L = 0$. Supposons maintenant que $(*)$ est vraie pour un $L \geq 0$ et montrons qu'elle est vraie pour $L+1 \leq n$. Il suffit de remarquer que :

$$\frac{\partial^n f_1}{\partial z_1^n} = h(L) \frac{\partial^n f_{p(L)}}{\partial z_1^{n-L} \partial z_2^L} = \begin{cases} h(L) \frac{\partial^n f_2}{\partial z_1^{n-(L+1)} \partial z_2^{L+1}} & \text{si } L \text{ est pair (1) (à l'aide de } (\alpha)), \\ -h(L) \frac{\partial^n f_1}{\partial z_1^{n-(L+1)} \partial z_2^{L+1}} & \text{si } L \text{ est impair (2) (à l'aide de } (\alpha)). \end{cases} \tag{10.1}$$

Dans (1), lorsque L est pair, on a que $L+1$ est impair, donc $p(L+1) = 2$. De plus,

$$h(L+1) = \Im\mathrm{m}\,(\mathbf{i}^{L+1}) = \Im(\mathbf{i}^L \mathbf{i}) = \Re\mathrm{e}\,(\mathbf{i}^L) = h(L),$$

car $\mathbf{i}^L$ est réel.

Dans (2), lorsque L est impair, on a que $L+1$ est pair, donc $p(L+1) = 1$. De plus

$$h(L+1) = \Re\mathrm{e}\,(\mathbf{i}^{L+1}) = \Re\mathrm{e}\,(\mathbf{i}^L \mathbf{i}) = -\Im\mathrm{m}\,(\mathbf{i}^L) = -h(L).$$

Donc

$$\frac{\partial^n f_1}{\partial z_1^n} = h(L+1) \frac{\partial^n f_{p(L+1)}}{\partial z_1^{n-(L+1)} \partial z_2^{L+1}}$$

i.e. que l'hypothèse reste vraie pour $L+1$. $\square$

Lemme 10.2. Sous les conditions du théorème 10.2,

$$\frac{\partial^n f_2}{\partial z_1^n} = h'(n,k)\frac{\partial^n f_{p'(n,k)}}{\partial z_1^k \partial z_2^{n-k}} \text{ lorsque } n > 0 \text{ et } 0 \leq k \leq n$$

où $p'(n,k) = 2$ si $n-k$ est pair (ou zéro) et $p'(n,k) = 1$ si $n-k$ est impair, ainsi que $h'(n,k) = \Im\mathrm{m}\,(\mathbf{i}^{n-k+1})$ si $n-k$ est pair (ou zéro) et $h'(n,k) = \Re\mathrm{e}\,(\mathbf{i}^{n-k+1})$ si $n-k$ est impair.

Démonstration (Par le principe d'induction fini)**.**
Soit $n > 0$ fixé et $0 \leq k \leq n$.

Posons $L = n-k$, ainsi notre hypothèse devient

$$\frac{\partial^n f_2}{\partial z_1^n} = h'(L)\frac{\partial^n f_{p'(L)}}{\partial z_1^{n-L}\partial z_2^L} \text{ pour } 0 \leq L \leq n. \tag{$**$}$$

Il est évident que l'hypothèse est vraie pour $L = 0$. Supposons maintenant que $(**)$ est vraie pour un $L \geq 0$ et montrons qu'elle reste vraie pour $L+1 \leq n$. Il suffit de remarquer que :

$$\frac{\partial^n f_2}{\partial z_1^n} = h'(L)\frac{\partial^n f_{p'(L)}}{\partial z_1^{n-L}\partial z_2^L} = \begin{cases} -h'(L)\frac{\partial^n f_1}{\partial z_1^{n-(L+1)}\partial z_2^{L+1}} & \text{(1) si } L \text{ est pair (à l'aide de } (\alpha)\text{),} \\ h'(L)\frac{\partial^n f_2}{\partial z_1^{n-(L+1)}\partial z_2^{L+1}} & \text{(2) si } L \text{ est impair (à l'aide de } (\alpha)\text{).} \end{cases}$$

Dans (1), lorsque L est pair, on a que $L+1$ est impair, donc $p'(L+1) = 1$. De plus,

$$h'(L+1) = \Re\mathrm{e}\,(\mathbf{i}^{L+2}) = \Re\mathrm{e}\,(-\mathbf{i}^L) = -\mathbf{i}^L = -\Im\mathrm{m}\,(\mathbf{i}\mathbf{i}^L) = -\Im\mathrm{m}\,(\mathbf{i}^{L+1}) = -h'(L)$$

car $\mathbf{i}^L$ est réel.

Dans (2), lorsque L est impair, on a que $L+1$ est pair, donc $p'(L+1) = 2$. De plus,

$$h'(L+1) = \Im\mathrm{m}\,(\mathbf{i}^{L+2}) = -\Im\mathrm{m}\,(\mathbf{i}^L) = \Re\mathrm{e}\,(\mathbf{i}\mathbf{i}^L) = \Re\mathrm{e}\,(\mathbf{i}^{L+1}) = h'(L).$$

Donc,

$$\frac{\partial^n f_2}{\partial z_1^n} = h'(L+1)\frac{\partial^n f_{p'(L+1)}}{\partial z_1^{n-(L+1)}\partial z_2^{L+1}}$$

i.e. que l'hypothèse reste vraie pour $L+1$. □

Ainsi,

$$a_n(w-w_0)^n = \sum_{k=0}^{n}\left(\mathbf{i}^{n-k}\frac{h(n,k)\frac{\partial^n f_{p(n,k)}}{\partial z_1^k\partial z_2^{n-k}}}{k!(n-k)!}(w_1-w_1^0)^k(w_2-w_2^0)^{n-k}\right.$$
$$\left. +\mathbf{i}^{n-k+1}\frac{h'(n,k)\frac{\partial^n f_{p'(n,k}}{\partial z_1^k\partial z_2^{n-k}}}{k!(n-k)!}(w_1-w_1^0)^k(w_2-w_2^0)^{n-k}\right).$$

Comme $p(n,k) \neq p'(n,k)$, on a toutes les $a^i_{k,n-k}$ pour $i = 1,2$ et $k \in \{0,\ldots,n\}$ $(j = 1,2)$. Le seul problème est peut-être le signe. Or,

$$\mathbf{i}^{n-k}h(n,k) = \begin{cases} \Re\mathrm{e}\,(\mathbf{i}^{n-k})\Re\mathrm{e}\,(\mathbf{i}^{n-k}) = 1 & \text{avec } p(n,k) = 1 \text{ si } n-k \text{ est pair,} \\ \mathbf{i}\Im\mathrm{m}\,(\mathbf{i}^{n-k})\Im\mathrm{m}\,(\mathbf{i}^{n-k}) = \mathbf{i} & \text{avec } p(n,k) = 2 \text{ si } n-k \text{ est impair} \end{cases}$$

et

$$\mathbf{i}^{n-k+1}h'(n,k) = \begin{cases} \mathbf{i}\Im\mathrm{m}\,(\mathbf{i}^{n-k+1})\Im\mathrm{m}\,(\mathbf{i}^{n-k+1}) = \mathbf{i} & \text{avec } p'(n,k) = \mathbf{i} \text{ si } n-k \text{ est pair,} \\ \Re\mathrm{e}\,(\mathbf{i}^{n-k+1})\Re\mathrm{e}\,(\mathbf{i}^{n-k+1}) = 1 & \text{avec } p'(n,k) = 1 \text{ si } n-k \text{ est impair.} \end{cases}$$

Donc,

$$\frac{f^{(n)}(w_0)}{n!}(w-w_0)^n = \sum_{k=0}^{n}\left[a^1_{k,n-k}(w_1-w_1^0)^k(w_2-w_2^0)^{n-k} + \mathbf{i}a^2_{k,n-k}(w_1-w_1^0)^k(w_2-w_2^0)^{n-k}\right].$$

Ceci implique que

$$\lim_{L\to\infty}\sum_{n=0}^{L}\frac{f^{(n)}(w_0)(w-w_0)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(w_0)(w-w_0)^n}{n!} = f(w),$$

car les parties réelles-complexes primes et imaginaires-complexes primes se voudront des réarrangements respectivement de f_1 et de f_2, lesquels convergent par le fait que f_1 et f_2 sont holomorphes.

Preuve du (#2)

On a que

$$\begin{aligned} |a_n|'(|w-w_0|')^n &= \left|\frac{f^{(n)}(w_0)}{n!}\right|'(|w-w_0|')^n \\ &= \frac{1}{n!}\left|\frac{\partial^n f_1}{\partial z_1^n} + \mathbf{i}\frac{\partial^n f_2}{\partial z_1^n}\right|'\left(\left|w_1-w_1^0\right|' + \left|w_2-w_2^0\right|'\right)^n \\ &= \frac{1}{n!}\left(\left|\frac{\partial^n f_1}{\partial z_1^n} + \frac{\partial^n f_2}{\partial z_2^n}\right|'\right)\left(\left|w_1-w_1^0\right|' + \left|w_2-w_2^0\right|'\right)^n \\ &= \frac{1}{n!}\left(\left|\frac{\partial^n f_1}{\partial z_1^n} + \frac{\partial^n f_2}{\partial z_2^n}\right|'\right)\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{n}\left(\left|w_1-w_1^0\right|'^k\left|w_2-w_2^0\right|'^{n-k}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(\left|\frac{1}{k!(n-k)!}\frac{\partial^n f_1}{\partial z_1^n}(w_1-w_1^0)^k(w_2-w_2^0)^{n-k}\right|'\right. \\ &\quad \left. + \left|\frac{1}{k!(n-k)!}\frac{\partial^n f_2}{\partial z_2^n}(w_1-w_1^0)^k(w_2-w_2^0)^{n-k}\right|'\right), \end{aligned}$$

car $w_1 - w_1^0$, $w_2 - w_2^0 \in \mathbb{C}'$ et on sait que pour $z \in \mathbb{C}'$ et $w \in \mathbb{T}$, on a que $\left|z^k\right|' = \left(|z|'\right)^k$ et $|w \cdot z|' = |w|'\,|z|'$.

On sait aussi que

$$\frac{\partial^n f_1}{\partial z_1^n} = h(n,k)\frac{\partial^n f_{p(n,k)}}{\partial z_1^k\partial z_2^{n-k}} \text{ et } \frac{\partial^n f_2}{\partial z_1^n} = h'(n,k)\frac{\partial^n f_{p'(n,k)}}{\partial z_1^k\partial z_2^{n-k}}$$

où $h(n,k), h'(n,k) = \pm 1$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
|a_n|' \left(|w - w_0|'\right)^n = &\sum_{k=0}^{n} \left| \frac{1}{k!(n-k)!} \frac{\partial^n f_{p(n,k)}}{\partial z_1^k \partial z_2^{n-k}} (w_1 - w_1^0)^k (w_2 - w_2^0)^{n-k} \right|' \\
&+ \left| \frac{1}{k!(n-k)!} \frac{\partial^n f_{p'(n,k)}}{\partial z_1^k \partial z_2^{n-k}} (w_1 - w_1^0)^k (w_2 - w_2^0)^{n-k} \right|' \\
= &\sum_{k=0}^{n} \left| a^1_{k,n-k} (w_1 - w_1^0)^k (w_2 - w_2^0)^{n-k} \right|' + \left| a^2_{k,n-k} (w_1 - w_1^0)^k (w_2 - w_2^0)^{n-k} \right|',
\end{aligned}$$

car $p(n,k) \neq p'(n,k)$.

De plus,

$$\lim_{L\to\infty} \sum_{n=0}^{L} \sum_{k=0}^{n} \left| a^j_{k,n-k} (w_1 - w_1^0)^k (w_2 - w_2^0)^{n-k} \right|'$$

converge pour $j = 1, 2$, car c'est un réarrangement de f_j, lequel converge <u>absolument</u> comme série double. Donc,

$$\lim_{L\to\infty} \sum_{n=0}^{L} \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=1,2} \left| a^j_{k,n-k} (w_1 - w_1^0)^k (w_2 - w_2^0)^{n-k} \right|' \right) \right) \text{ converge.}$$

C'est-à-dire que

$$\lim_{L\to\infty} \sum_{n=0}^{L} \left(|a_n|' \, |w - w_0|'^n \right) \text{ converge.}$$

Ainsi $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|' |w - w_0|'$ converge.

De plus, comme $|a_n(w - w_0)^n|' \leq |a_n|' \, |w - w_0|'^n$, on a par le critère de comparaison que la série converge absolument avec la norme $|\ |'$. □

Abordons maintenant un théorème relatif à la convergence des séries de puissances dans le cas des tétranombres.

Théorème 10.3. Soit $f(w) = a_n w^n$ avec $a_n \in \mathbb{T}$. Alors, il existe un $0 \leq R \leq \infty$ appelé un rayon de convergence avec les propriétés suivantes :

i) La série converge absolument $\forall w$ avec $|w| < R$. De plus, si $0 \leq \rho < R$ la convergence est uniforme pour $|w| \leq \rho$.

ii) Dans $|w| < R$, $f(w)$ est $\mathbb{T}$-holomorphe. De plus, $f'(w) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n w^{n-1}$ qui converge dans le même rayon de convergence.

Aussi, $\dfrac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ est un rayon de convergence possible satisfaisant les propriétés i) et ii).

Remarque 13. Dans ce théorème, les normes $|\ |$ et $|\ |'$ peuvent être substituées indifféremment. ▲

Démonstration.

i) Posons $\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ et $R > 0$ (le cas où $R = 0$ est trivial).
Si $|w| < R$, on peut trouver un ρ tel que $|w| < \rho < R$. Alors, $\frac{1}{\rho} > \frac{1}{R}$ implique, par la définition de la lim sup, que $|a_n| < \frac{1}{\rho^n}$ $\forall n \geq N_0$. Donc

$$|a_n||w|^n < \left(\frac{|w|}{\rho}\right)^n \forall n \geq N_0.$$

Or, $\frac{|w|}{\rho} < 1$ implique que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|w|}{\rho}\right)^n < \infty.$$

Ainsi, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||w|^n < \infty$. De plus $|a_n w^n| \leq |a_n||w|^n$ implique que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ converge (absolument).
Pour montrer la convergence uniforme, considérons $|w| \leq \rho < R$ et choisissons ρ' tel que $\rho < \rho' < R$. Ainsi,

$$|a_n w^n| \leq |a_n||w|^n \leq \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^n \forall n \geq N_0'.$$

De plus, puisque $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{\rho'}\right) < \infty$ (car $\frac{\rho}{\rho'} < 1$), on obtient par le critère de Weierstrass que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n w^n$ converge uniformément pour $|w| \leq \rho$.
Par la même occasion, on peut voir directement que $f(w)$ est continue pour $|w| \leq \rho$, car la convergence y est uniforme et le $a_n w^n$ sont des fonctions continues.

ii) Premièrement, considérons $g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n w^{n-1}$. Alors,

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|na_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

car $\sqrt[n]{|na_n|} = \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{|a_n|}$ et $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Ainsi, $g(w)$ a le même rayon de convergence (selon $|\ |$ et $|\ |'$) que $f(w)$. Il reste à montrer que $f'(w) = g(w)$.
Or, de la proposition 9.1, il suffit de démontrer que la fonction $f : U \subset \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ où $U = \{w \in \mathbb{T} : |w| < R\}$ est $\mathbb{T}$-différentiable par limite, $\forall w_0 \in U$ avec $\tilde{f}(w_0) = g(w_0)$.

On sait déjà de (i), que f est continue sur U. Aussi, pour des h suffisamment petits et inversibles, on a que

$$\begin{aligned}\frac{f(w_0+h)-f(w_0)}{h}-g(w_0)=&\frac{1}{h}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n(w_0+h)^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_nw_0^n\right)-\sum_{n=1}^{\infty}na_nw_0^{n-1}\\=&\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(\frac{(w_0+h)^n-w_0^n}{h}-nw_0^{n-1}\right).\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}\left|\frac{(w_0+h)^n-w_0^n}{h}-nw_0^{n-1}\right|&\leq\left(\frac{(|w_0|+|h|)^n-|w_0|^n}{|h|}-n|w_0|^{n-1}\right),\\&=\frac{|w_0|^n+\binom{n}{1}|w_0|^{n-1}|h|+\binom{n}{2}|w_0|^{n-2}|h|^2+\ldots+|h|^n-|w_0|^n}{|h|}\\&-n|w_0|^{n-1}\end{aligned}$$

car

$$\left|\frac{w_0^n+\binom{1}{n}w_0^{n-1}h+\binom{2}{n}w_0^{n-2}h^2+\ldots+h^n-w_0^n}{h}-nw_0^{n-1}\right|\leq\binom{2}{n}|w_0|^{n-2}|h|+\ldots+|h|^{n-1}.$$

Donc,

$$\left|\frac{f(w_0+h)-f(w_0)}{h}-f(w_0)\right|\leq\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\left(\frac{(|w_0|+|h|)^n-|w_0|^n}{|h|}-n|w_0|^{n-1}\right).\qquad(*)$$

Posons $\rho=\frac{R+|w_0|}{2}<R$. Ainsi, on peut écrire $(*)$ comme

$$\left|\frac{f(w_0+h)-f(w_0)}{h}-f(w_0)\right|\leq\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\rho^n\cdot\frac{1}{\rho^n}\cdot\left(\frac{(|w_0|+|h|)^n-|w_0|^n}{|h|}-n|w_0|^{n-1}\right).$$

Or, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|\rho^n<\infty$ implique que $|a_n|\rho^n\to 0$ lorsque $n\to\infty$. Donc, il existe un K tel que $|a_n|\rho^n<K\ \forall n$. Ce qui implique que :

$$\left|\frac{f(w_0+h)-f(w_0)}{h}-g(w_0)\right|\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K}{\rho^n}\left(\frac{(|w_0|+|h|)^n}{|h|}-n|w_0|^{n-1}\right).\qquad(**)$$

Or,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K}{\rho^n}\left(\frac{(|w_0+|h|)^n-|w_0|^n}{|h|}\right)=\frac{K}{|h|}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{|w_0|+|h|}{\rho}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|w_0|}{\rho}\right)^n\right).$$

De plus, pour des h suffisamment petits :

$$\begin{aligned}\frac{1}{|h|}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{|w_0|+|h|}{\rho}\right)^n=&\frac{1}{|h|}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{|w_0|+|h|}{\rho}\right)}\\=&\frac{\rho}{|h|(\rho-(|w_0|+|h|)}\text{ car }|w_0|<\rho.\end{aligned}$$

Puis,

$$\frac{1}{|h|}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{|w_0|}{\rho}\right)^n = \frac{1}{|h|}\cdot\frac{\rho}{\rho-|w_0|}$$

et

$$\frac{1}{\rho}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{|w_0|}{\rho}\right)^{n-1} = \frac{\rho}{(\rho-|w_0|)^2}.$$

Donc,

$$(**) = K\left[\frac{1}{|h|}\left(\frac{\rho}{\rho-|w_0|-|h|}-\frac{\rho}{\rho-|w_0|}\right)-\frac{\rho}{(\rho-|w_0|)^2}\right] = \frac{K\rho|h|}{(\rho-|w_0|-|h|)(\rho-|w_0|)^2}.$$

Or,

$$\lim_{x\to 0}\frac{K\rho|x|}{(\rho-|w_0|-|x|)(\rho-|w_0|)^2} \to 0 \text{ pour des } x\in\mathbb{R}.$$

On a donc que $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ tel que pour $|h|<\delta$ et h inversible,

$$\left|\frac{f(w_0+h)-f(w_0)}{h}-g(w_0)\right| \leq \frac{K\rho|h|}{(\rho-|w_0|-|h|)(\rho-|w_0|)^2} < \varepsilon.$$

Ainsi, f est $\mathbb{T}$-différentiable par limite $\forall w_0\in U$ avec $\tilde{f}(w_0)=g(w_0)$. Ce qui implique que

$$f'(w) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n w^{n-1}$$

pour $|w|<R$.

□

Chapitre

11 Le principe d'identité

Le but de cette dernière section est de particulariser le principe d'identité de $\mathbb{C}'^2$ pour les fonction $\mathbb{T}$-holomorphes définies de $\mathbb{C}'^2$ vers $\mathbb{C}'^2$.

Lemme 11.1. Soit $f : U \subset \mathbb{C}'^2 \to \mathbb{C}'^2$, $\mathbb{T}$-holomorphe et $C^1(U)$ où U est un ouvert connexe (domaine). Si il existe un $w_0 \in U$ tel que $f(w_0), f'(w_0), f''(w_0), \ldots, f^{(n)}(w_0), \ldots$ sont nulles $(\forall n \in \mathbb{N})$, alors $f(w)$ est identiquement nulle sur U.

Démonstration.
Siot E_1 l'ensemble des points $w_0 \in U$ où $f(w_0), f'(w_0), \ldots, f^{(n)}(w_0), \ldots$ s'annulent $(\forall n \in \mathbb{N})$, et E_2 l'ensemble des points $w \in U$ où f a au moins une de ses dérivées (ou f elle-même) qui ne s'annule pas. Alors, $U = E_1 \cup E_2$ et $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.

Or, E_1 est ouvert, car f est $\mathbb{T}$-holomorphe et $C^1(U)$ implique que $\forall w_0 \in U$, il existe une boule B_{w_0} telle que $\forall w \in B_{w_0}$, $f(w) \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(w_0)}{n!}(w - w_0)^n$ par le théorème 10.2. Ce qui implique que $f(w) = 0$ dans la boule B_{w_0} lorsque $f^{(n)}(w_0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. De plus, par la continuité de $f^{(n)}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, on a aussi que E_2 est ouvert.

Comme U est un ouvert connexe, cela implique que $E_1 = \emptyset$ ou $E_2 = \emptyset$. Mais, $E_1 \neq \emptyset$ par hypothèse. Donc, $E_2 = \emptyset$, *i.e.* $U = E_1$. Ce qui implique que $f \equiv 0$ sur U. $\square$

Définition 11.1. Soit $f : U \subset \mathbb{C}'^2 \to \mathbb{C}'^2$, $\mathbb{T}$-holomorphe et $C^1(U)$ où U est un domaine et f est non-identiquement nulle sur U. Si pour un $w_0 \in U$, on a que $f(w_0) = 0$, alors par le lemme précédent, il existe un plus petit entier h tel que $f^{(h)}(w_0) \neq 0$. On dira que w_0 est un zéro d'ordre h.

Remarque 14. Le lemme précédent nous assurer qu'il n'y a pas de zéro d'ordre "∞", si la fonction est non-identiquement nulle sur U. ▲

Théorème 11.1. Soit $f : U \subset \mathbb{C}'^2 \to \mathbb{C}'^2$, $\mathbb{T}$-holomorphe et $C^1(U)$ où U est un domaine et f non-identiquement nulle sur U. De plus, supposons que $f(w_0) = 0$ où $w_0 \in U$ est un zéro d'ordre h. Alors, il existe une boule B'_{w_0} sur laquelle

$$f(w) = (w - w_0)^h f_h(w) \text{ où } f_h(w) \text{ y est continue}$$

et

$$f_h(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n+h)}(w_0)}{(n+h)!}(w - w_0)^n.$$

Démonstration.
Comme f est $\mathbb{T}$-holomorphe et $C^1(U)$, cela implique qu'il existe une boule B_{w_0} sur laquelle :

$$\begin{aligned} f(w) =& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(w_0)}{n!}(w - w_0)^n \\ =& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n+h)}(w_0)}{(n+h)!}(w - w_0)^{n+h}. \end{aligned}$$

Pour plus de clarté, nous poserons $a_n = \frac{f^{(n)}(w_0)}{n!}$.

Notre but est évidemment de sortir $(w - w_0)^n$ de la sommation. Si $(w - w_0)^n$ est inversible pour un $w \in B_{w_0}$, alors $\frac{1}{(w-w_0)^h}$ existe et

$$\frac{1}{(w - w_0)^h} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+h}(w - w_0)^{n+h} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+h}(w - w_0)^n.$$

Ainsi,

$$f(w) = (w - w_0)^h \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+h}(w - w_0)^n.$$

Qu'arrive-t-il si $(w - w_0)^h$ est non-inversible ? Il suffit de montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+h}(w - w_0)^n$ converge $\forall w \in B_{w_0}$.

Par le théorème 10.2 (#2), on a que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|' (|w - w_0|')^n$ converge sur B_{w_0}. De plus, comme $a_n = 0$ pour $0 \leq n < h$, on a que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|' (|w - w_0|')^n =& \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+h}|' (|w - w_0|')^{n+h} \\ =& (NCsw - w_0)^h \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+h}|' (|w - w_0|')^n. \end{aligned}$$

Donc, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+h}|' (|w - w_0|')^n$ converge sur B_{w_0}.

Or, $|a_{n+h} \cdot (w - w_0)^n|' \leq |a_{n+h}|' (|w - w_0|')^n$. Ce qui implique que $|a_{n+h}(w - w_0)|'$ converge dans B_{w_0}. Donc, $f_h(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+h}(w - w_0)^n$ converge dans B_{w_0}, car elle y converge absolument.

Ainsi, comme la série $f_h(w)$ converge, on a que

$$(w - w_0)^h \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+h}(w - w_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+h}(w - w_0)^{n+h} = f(w).$$

Il reste maintenant à montrer que $f_h(w)$ est <u>continue</u>.

Or, condidérons un $w_1 \neq w_0$ avec $w_1 \in B_{w_0}$, on a donc que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+h}|' (|w_1 - w_0|')^n$ converge. Ainsi

$$\left\{ |a_{n+h}|' (|w_1 - w_0|')^n \right\}_{n=0}^{\infty} \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty$$

et $|a_{n+h}|' (|w_1 - w_0|')^n \leq M$, $\forall n$. Soit maintenant w tel que $|w - w_0|' < |w_1 - w_0|'$ avec $w \neq w_0$. Alors,

$$\begin{aligned} |a_{n+h}|' (w - w_0)^n \leq & (|a_{n+h}|' |w - w_1|')^n \\ = & \frac{|a_{n+h}|' (|w - w_0|')^n}{|w_1 - w_0|'} \\ \leq & M \left(\frac{|w - w_0|'}{|w_1 - w_0|'} \right)^n \equiv c_n \end{aligned}$$

où $\frac{|w-w_0|'}{|w_1-w_0|'} < 1$, i.e.

$$|a_{n+h}(w - w_0)^n|' \leq c_n \in \mathbb{R}$$

tel que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge.

Donc, par le critère de Weierstrass, on obtient que $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+h}(w - w_0)^n$ <u>converge uniformément</u> dans une boule B'_{w_0} ayant un rayon $< |w_1 - w_0|'$.

Or, comme les $a_{n+h} \cdot (w - w_0)^n$ sont des fonctions continues sur B'_{w_0} et que la convergence y est uniforme, on obtient que $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+h}(w - w_0)^n$ est continue sur B'_{w_0}. $\square$

Corollaire 11.1. Soit $f : U \subset \mathbb{C}'^2 \to \mathbb{C}'^2$, $\mathbb{T}$-holomorphe et $C^1(U)$ où U est un domaine et f non-identiquement nulle sur U. Si $f(w_0) = 0$ pour un $w_0 \in U$, alors il existe un voisinage de w_0 sur lequel $f(w) = 0$ seulement si $w - w_0$ est non-inversible.

Démonstration.

Par hypothèse, il existe un $h > 0$ tel que $f^{(h)}(w_0) \neq 0$, *i.e.* $f_h(w_0) \neq 0$. donc, par continuité,

$f_h(w_0) \neq 0$ dans un certain voisinage de w_0. Or, si pour un w de ce voisinage, $w - w_0$ est <u>inversible</u> et $f(w) = 0$, on obtient que $(w - w_0)^h f_h(w) = 0$. Ainsi, en divisant par $(w - w_0)^h$, on obtient que $f_h(w) = 0$, ce qui est une contradiction. □

> **Théorème 11.2.** Considérons $f, g : U \subset \mathbb{C}'^2 \to \mathbb{C}'^2$, $\mathbb{T}$-holomorphe et $C^1(U)$ où U est un domaine. Si $f(w) = g(w)$ $\forall w \in E$ où E est un sous-ensemble de U possédant un point d'accumulation dans U (notons ce point w_0) tel que les éléments de $\{w - w_0 : w \in E\}$ soient inversibles, alors $f(w) = g(w)$ sur U.

Démonstration.
Soit $h(w) = f(w) - g(w)$ sur U. Alors h sera de la forme $\mathbb{C}'^2 \to \mathbb{C}'^2$, $\mathbb{T}$-holomorphe et $C^1(U)$. Supposons que $h(w)$ est non-identiquement nulle sur U.

Comme w_0 est un point d'accumulation de E dans U, cela implique qu'il existe $\{w_n\}_{n=0}^{\infty} \subset E$ telle que $w_n \to w_0$ et $w_n \neq w_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ainsi,

$$\lim_{n\to\infty} h(w_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 = h(w_0)$$

par continuité.

Donc, $h(w_0) = 0$ et w_0 est un point d'accumulation de $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ tel que $w_n - w_0$ est inversible $\forall n$. Ce qui est une contradiction avec le corollaire 11.1. Ainsi, $h(w) = 0$ sur U, *i.e.* $f(w) = g(w)$ sur U. □

> **Corollaire 11.2.** Toutes les identités trigonométriques valides sur la droite réelle et ne se servant pas de la division sont généralisables dans le cas des tétranombres.

Démonstration.
Le sinus et le cosinus sont des fonctions $\mathbb{T}$-holomorphes et $C^1(\mathbb{R}^4)$. De plus, si on prend, par exemple, $w_0 = 0$ avec $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, alors $w - w_0 = \frac{1}{n}$ sera inversible pour tout $n \in \mathbb{N}$ (avec $n \neq 0$). Et on conclut les résultat par le principe d'identité pour les tétranombres. □

Remarque 15. Le théorème 11.2 est une particularisation du principe d'identité obtenu de l'analyse complexe dans $\mathbb{C}'^2$. ▲

Conclusion

Beaucoup de résultats ont été énoncés, mais encore beaucoup de questions peuvent être soulevées. La raison en est que pour chaque résultat de l'analyse complexe dans $\mathbb{C}$, on peut se demander si une extension en est possible pour le cas des tétranombres.

Ainsi, il m'aurait été quasi-impossible de faire de ce mémoire une analyse exhaustive de tous les résultats de l'analyse complexe dans $\mathbb{C}$ que l'on pourrait potentiellement généraliser pour les tétranombres.

Par contre, il est possible de suivre une ligne directrice à l'aide des plus grands résultats de l'analyse complexe dans $\mathbb{C}$. Dans ce mémoire : les coordonnées polaires, la notion de différentiabilité, le développement en série, ainsi que le principe d'identité ont été ma ligne directrice de recherche.

Pour ce qui est des résultats à venir, il semble que l'étude de l'intégrale pour les tétranombres soit une voie évidente et naturelle à emprunter. Ayant personnellement commencé à explorer cette nouvelle voie, je peux actuellement en dire que certains résultats semblent réalisables, mais que les éléments non-inversibles rencontrés dans l'ensemble des tétranombres font pointer d'importants problèmes.

Je souhaite donc bonne chance à tous ceux ou celles qui voudront explorer comme moi les nouvelles frontières de cette théorie.

Remerciements

Je remercie sincèrement mon directeur de recherche Monsieur P.M. Gauthier pour sa disponibilité et les nombreux conseils qu'il m'a donnés. Merci de m'avoir donné la possibilité de faire des rencontres très intéressantes lors de voyages, ainsi que pour votre aide financière apportée.

Je remercie également mon codirecteur Monsieur W. Hengartner pour son appréciation face à ce mémoire, pour ses conseils et les corrections apportées lors de ma rédaction.

Enfin, je remercie le fond de recherche F.C.A.R pour l'aide financière accordée tout au long de mes années de maîtrise.

Bibliographie

[1] **Ahlfors, L.**, *Complex Analysis*, 3e édition, McGraw-Hill, 1979.

[2] **Grauert, H., Fritzsche, K.**, *Several Complex Variables*, Springer-Verlag, 1976.

[3] **Kaup, L., Kaup B.**, *Holomorphic Functions of Several Variables*, Walter de Gruyter, 1983.

[4] **Kantor, I. L.**, *Hypercomplex numbers*, Springer-Verlag, 1989.

[5] **Kaplan, W.**, *Introduction to Analytic Function*, Addison-Wesley, 1996.

[6] **Malonek, H.**, *A New Hypercomplex Structure of the Euclidiean Space* $\mathbb{R}^{m+1}$ *and the Concept of Hypercomplex Differentiability*, Complex Variables, Vol. 14, pp.25-33, 1990.

[7] **Marsden, J., Hoffman, M.**, *Elementary Classical Analysis*, 2e éd., W. H. Freeman and Company, 1993.

[8] **Lanckan, E., Tutschke, W.**, *Complex Analysis : Methods, Trends and Applications*, Akademie-Verlag, 1983.

[9] **Lang, S.**, *Complex Analysis*, 3e éd., Springer-Verlag, 1993.

[10] **Range, M.**, *Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables*, Springer-Verlag, 1986.

[11] **Rudin, W.**, *Real and Complex Analysis*, 3e éd., McGraw-Hill, 1987.

[12] **Ryan, J.,**, *Complexified Clifford Analysis*, Complex Variables, Vol. 1, pp. 119-149, 1982.

[13] **Shabot, B. V.**, *Introduction to Complex Analysis part II : Functions of Several Variables*, American Mathematical Society, 1992.

[14] **Sobczyk, G.**, *The Hyperbolic Number Plane*, The College Mathematical Journal, Vol. 26, pp. 269-280, 1995.